



EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

Language: Portuguese

Day: 1

Quarta-feira, 11 de abril de 2018

Problema 1. Seja ABC um triângulo com $CA = CB$ e $\angle ACB = 120^\circ$, e seja M o ponto médio de AB . Seja P um ponto variável no circuncírculo de ABC , e seja Q o ponto no segmento CP tal que $QP = 2QC$. Sabe-se que a reta que passa por P e é perpendicular à reta AB intersecta a reta MQ em um único ponto N .

Prove que existe uma circunferência fixa tal que N pertence a essa circunferência para qualquer posição de P .

Problema 2. Considere o conjunto

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Prove que todo inteiro $x \geq 2$ pode ser escrito como o produto de um ou mais elementos de A , não necessariamente distintos.
- (b) Para todo inteiro $x \geq 2$, seja $f(x)$ o menor inteiro tal que x pode ser escrito como o produto de $f(x)$ elementos de A , não necessariamente distintos.

Prove que existem infinitos pares (x, y) de inteiros com $x \geq 2$, $y \geq 2$, e

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são distintos se $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$).

Problema 3. As n competidoras de uma EGMO são chamadas de C_1, \dots, C_n . Depois da competição, elas formam uma fila na frente do restaurante de acordo com as seguintes regras:

- O Juri escolhe a ordem inicial das competidoras na fila.
- A cada minuto, o Juri escolhe um inteiro i tal que $1 \leq i \leq n$.
 - Se a competidora C_i tem pelo menos i outras competidoras na sua frente, ela paga 1 euro para o Juri e anda exatamente i posições para frente.
 - Se a competidora C_i tem menos de i outras competidoras na sua frente, o restaurante abre e esse processo se encerra.

- (a) Prove que esse processo não pode continuar indefinidamente, independentemente das escolhas do Juri.
- (b) Determine para cada n a maior quantidade de euros que o Juri pode arrecadar das competidoras escolhendo de maneira esperta a ordem inicial e a sequência de escolhas dos inteiros i .

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos



EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

Language: Portuguese

Day: 2

Quinta-feira, 12 de abril de 2018

Problema 4. Um *dominó* é uma peça de tamanho 1×2 ou 2×1 .

Seja $n \geq 3$ um inteiro. Dominós são colocados em um tabuleiro quadriculado $n \times n$ de maneira que cada dominó cobre exatamente 2 casas do tabuleiro e os dominós não se sobrepõem.

O *valor* de uma linha ou coluna do tabuleiro é o número de dominós que cobre pelo menos uma casa dessa linha ou coluna. Uma configuração de dominós no tabuleiro é chamada *balanceada* se existe algum $k \geq 1$ tal que cada linha e cada coluna tem valor k .

Prove que uma configuração balanceada existe para todo $n \geq 3$, e encontre o menor número de dominós necessários para tal configuração.

Problema 5. Seja Γ o circuncírculo do triângulo ABC . A circunferência Ω é tangente ao segmento AB e é tangente a Γ em um ponto que fica no mesmo lado da reta AB que o ponto C . A bissetriz de $\angle BCA$ intersecta Ω em dois pontos distintos P e Q .

Prove que $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6.

(a) Prove que para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe um inteiro positivo n com a seguinte propriedade: para todo conjunto S de n inteiros positivos existem dois elementos diferentes x e y de S , e um inteiro *não negativo* m (i.e. $m \geq 0$), tal que

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Determine se para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe um conjunto infinito S de inteiros positivos tal que

$$|x - my| > ty$$

pra todo par de elementos distintos x e y de S e pra todo inteiro *positivo* m (i.e. $m > 0$).