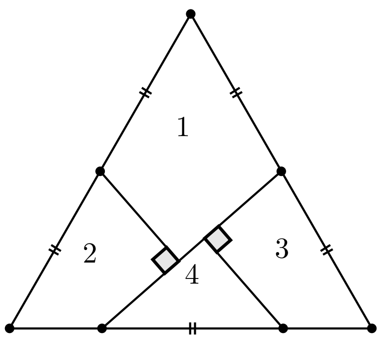
XL Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário
VIII Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether 2018
Primeira Fase

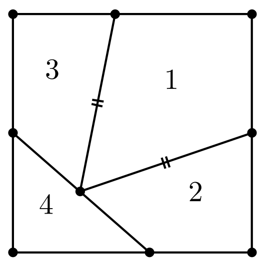
Sexta-feira, 4 de maio de 2018

Bem-vindo à Primeira Fase da XL Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário e do VIII Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether

- **Marque seus resultados na folha de respostas anexa. Cada resposta correta vale um ponto.**
- **Duração:** 3 **horas.**
- **Lembre-se de que você não pode usar calculadoras, telefones celulares, tabelas, livros, anotações, etc.**
- **Não comente nem divulgue esta prova até o dia 6 de maio.**

1. Um triângulo equilátero é cortado da maneira indicada na figura 1 e as partes são usadas para formar a figura 2.





Qual é a forma da figura 2?

(a) Um quadrado (b) Um retângulo (c) Um losango (d) Nenhuma das anteriores

2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(x + g(y)) = -x + y + 1$ para cada par de números reais x e y. Qual é o valor de $g(x + f(y))$?
(a) $x + y - 1$ (b) $x - y + 1$ (c) $-x + y + 1$ (d) $-x + y - 1$

3. Quantas permutações a_1, a_2, a_3, a_4 de $1, 2, 3, 4$ satisfazem a condição de que, para $k = 1, 2, 3$, a lista $a_1, \ldots, a_k$ contém um número maior do que k?
(a) 10 (b) 11 (c) 13 (d) 15

4. Considere a propriedade de que cada elemento a de um grupo G satisfaça $a^2 = e$, sendo e o elemento identidade do grupo. Qual das seguintes afirmações nem sempre vale para um grupo G com essa propiedade?
(a) G é comutativo (b) G tem ordem infinita ou par (c) G é Noetheriano (d) G é espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$

5. Considere o conjunto
$$A = \left\{ \frac{j}{4} + \frac{100}{j} \,\middle|\, j = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$
Qual é o menor número que pertence ao conjunto A?
(a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 20

6. Dado um triângulo equilátero ABC no plano, quantos pontos P no plano são tais que os três triângulos APB, BPC e CPA são isósceles e não degenerados?
(a) 1 (b) 4 (c) 7 (d) 10

7. A menos de isomorfismos, quantos grafos simples de quatro vértices existem?
(a) 4 (b) 5 (c) 9 (d) 11

8. Um estudante vai prestar um exame no qual tem que resolver três problemas escolhidos ao acaso de uma lista de 10 problemas possíveis. Ele será aprovado se resolver corretamente dois problemas. Considerando que o estudante sabe resolver cinco dos problemas da lista e não sabe resolver os outros, qual é a probabilidade de que ele passe no exame?
(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

9. Quantas funções $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ satisfazem $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ para todo x?
(a) 12 (b) 10 (c) 9 (d) 16

10. Quantos pares ordenados de números reais (a, b) satisfazem a igualdade
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{e^{ax} - 2bx - 1} = \frac{1}{2} \text{ ?}$$
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) infinitos

11. Considere a família $\mathcal{F}$ de todas as funções deriváveis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem, para qualquer par de números reais x e y, à seguinte condição:
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Qual dos enunciados a seguir é verdadeiro?

(a) $\mathcal{F}$ é a família de todas as funções constantes (b) $\mathcal{F}$ é a família de todos os polinômios
(c) Todas as funções de $\mathcal{F}$ são de classe C^∞ (d) Todas as funções de $\mathcal{F}$ são da forma $f(x) = ax + b$

12. Seja ABC um triângulo equilátero. Escolhe-se ao acaso um ponto P no interior desse triângulo. Qual é a probabilidade de que a soma das distâncias do ponto P aos lados do triângulo ABC sejam as medidas dos lados de um triângulo?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$

13. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(x)f(f(x)) = 1$ para todo x real e $f(2020) = 2019$. Qual é valor de $f(2018)$?
(a) $\frac{1}{2018}$ (b) $\frac{1}{2020}$ (c) 2019 (d) 2018

14. Qual é a média aritmética de todos os valores da expressão

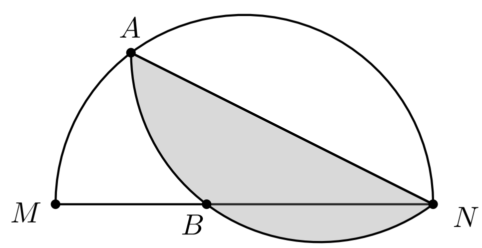
$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$$

na qual a_1, a_2, a_3, a_4 é uma permutação dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$?
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{10}{24}$ (c) $\frac{10}{3}$ (d) 3

15. Um número real a é escolhido de forma aleatória e uniforme no intervalo $[-3, 4]$. Qual é a probabilidade de que todas as raízes do polinômio $x^3 + ax^2 + ax + 1$ sejam reais?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{7}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{1}{3}$

16. Um número inteiro positivo de pelo menos dois algarismos escrito na base 10 é chamado *ascendente* se os algarismos aumentam de valor da esquerda para a direita. Por exemplo, 123 é ascendente, mas 132 y 122 não o são. Quantos números ascendentes existem?
(a) 502 (b) 503 (c) 511 (d) 513

17. Na figura, um semicírculo é dobrado ao longo da corda AN e intersecta o diâmetro MN em B. Sabe-se que $MB : BN = 2 : 3$ y $MN = 10$. Se $AN = x$, qual é o valor de x^2?



(a) 72 (b) 80 (c) 100 (d) 144

18. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para quantos números naturais n existe uma matriz real X tal que $X^n = A$?
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) infinitos

19. Qual é a maior quantidade de soluções complexas z que pode ter um sistema da forma

$$|z-1||z+1| = 1$$
$$Im(z) = b \ ?$$

(onde b é uma constante real). (a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

20. Qual é a maior quantidade de pontos que podem existir num plano de modo que cada distância entre quaisquer dois deles seja um número inteiro ímpar?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

21. Considere $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ um polinômio de coeficientes reais positivos, grau $n \geq 2$ e com n raízes reais. Qual das afirmações a seguir é sempre verdadeira?

(a) $p(2) < 2(2^{n-1}+1)$ (b) $p(1) < 3$ (c) $p(1) \geq 2^n$ (d) $p(3) < 3(2^{n-1}-2)$

22. Qual é o valor da integral imprópria $\int_0^\pi \log(\sin(x))dx$?
(a) $\pi \log 2$ (b) $\log 2$ (c) $-\log 2$ (d) $-\pi \log 2$

23. Para quantos números primos p o número $p^3 - 4p + 9$ é um quadrado perfeito?
(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 7

24. Qual é o valor da série

$$\sum_{1 \leq l < m < n} \frac{1}{5^l 3^m 2^n} \ ?$$

(a) $\frac{1}{30}$ (b) $\frac{1}{145}$ (c) $\frac{84}{29}$ (d) $\frac{29}{30}$

25. Considere o grupo de automorfismos do grupo aditivo $\mathbb{Z}/(10)$ dos inteiros módulo 10, ou seja,

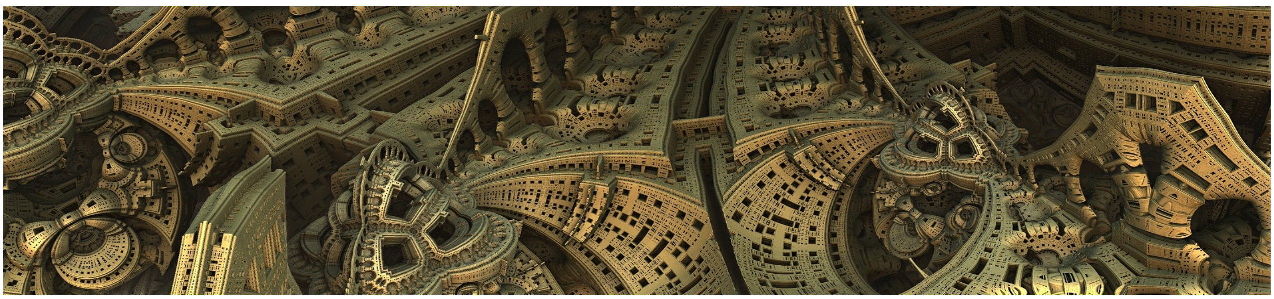
$$A = \{\varphi : \mathbb{Z}/(10) \to \mathbb{Z}/(10) \mid \varphi \text{ é automorfismo}\}.$$

Qual das seguintes afirmações é falsa?
(a) A ordem de A é par (b) A é abeliano (c) Existe $\varphi \neq Id$ em A com ordem ímpar (d) $A \times A$ não é cíclico

VIII Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether 2018
Segunda Fase

Sexta-feira, 8 de junho de 2018

Bem-vindo à Segunda Fase do Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether.



Instruções

- Leia com cuidado estas instruções antes de começar a prova.
- Em cada folha, no canto superior direito, você deve indicar seu nome (ou iniciais), o número do problema em que você está trabalhando e o número da folha.
- Responda às perguntas justificando todos os seus passos. Cada problema vale 10 pontos e serão dados pontos parciais por avanços na direção da solução de cada problema.
- Lembre-se que não se pode usar calculadoras, telefones celulares, tabelas, livros, anotações, etc.
- Você tem meia hora para fazer perguntas sobre as redações dos problemas e para pedir a definição de algum conceito que você não entenda.
- Você tem 4 horas e meia para resolver a prova.
- Os resultados serão divulgados nas próximas semanas por e-mail.
- Os problemas desta prova devem ser mantidos confidenciais até a segunda-feira, 17 de junho de 2018.

Problemas

1. (10 pontos) Considere três números reais positivos a, b, c tais que $a + b + c = 4$ e $abc = 1$. Prove que
$$a^2 + 8a \geq (b - c)^2.$$

2. (10 pontos) Determine todas as matrizes $A \in \mathcal{M}_{2018\times 2018}(\mathbb{C})$ tais que
$$A^2 + 2017I = 2018A.$$
Nota. I denota a matriz identidade.

3. (10 pontos) Prove que a seguinte série converge e determine seu valor:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}\right).$$

4. (10 pontos) Prove que existe um número real positivo $C > 1$ com a seguinte propiedade: Para quaisquier (n, s, t) inteiros positivos com s, t primos entre si, $s > (n-1)t$, e $t > 1$ temos:
$$\mathrm{mmc}[s, (s-t), (s-2t), ..., (s-(n-1)t)] > C^n.$$

5. (10 pontos) São escolhidos aleatoriamente 2018 pontos com probabilidade uniforme em um disco. Determine a probabilidade de que o centro do disco fique dentro da envoltória convexa desses 2018 pontos.

6. (10 pontos) Seja F um grupo livre gerado por n letras, com $n \geq 2$. Prove que para qualquer homomorfismo não nulo
$$\varphi : F \to \mathbb{Z},$$
o subgrupo
$$\{g \in F | \varphi(g) = 0\}$$
não é finitamente gerado.