29ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA do CONE SUL
BRASIL - 2018

PRIMEIRO DIA

Maceió, sábado, 25 de agosto de 2018

PROBLEMA 1

Em um quadrilátero convexo $ABCD$ tem-se que:

- R e S são pontos no interior dos segmentos CD e AB, respectivamente, com $AD = CR$ e $BC = AS$.
- P e Q são os pontos médios de DR e SB, respectivamente.
- M é o ponto médio de AC.

Sabendo que $\angle MPC + \angle MQA = 90^\circ$, demonstre que $ABCD$ é um quadrilátero cíclico.

PROBLEMA 2

Demonstrar que todo inteiro positivo pode ser representado como soma de potências de 3, 4 e 7 de modo que não apareçam na representação duas potências com a mesma base e o mesmo exponente.

Por exemplo: $2 = 7^0 + 7^0$ e $22 = 3^2 + 3^2 + 4^1$ não são representações válidas, mas $2 = 3^0 + 7^0$ e $22 = 3^2 + 3^0 + 4^1 + 4^0 + 7^1$ são válidas.

PROBLEMA 3

Considere o produto $P_n = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$ onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ para todo n inteiro positivo.

a) Encontrar todos os inteiros positivos m para os quais $\frac{P_{2020}}{m!}$ é um quadrado perfeito.

b) Demonstrar que existem infinitos valores de n para os quais $\frac{P_n}{m!}$ é quadrado perfeito para pelo menos dois valores inteiros positivos de m.

Duração da prova: 4 horas   Versão Português

Cada problema vale 10 pontos

SEGUNDO DIA

Maceió, domingo, 26 de agosto de 2018

PROBLEMA 4

Para cada inteiro $n \geq 4$ consideram-se m subconjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ tais que:

A_1 tem um elemento

A_2 tem dois elementos

⋮

A_m tem m elementos

e nenhum destes subconjuntos está contido no outro.

Encontrar o maior valor possível de m.

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo com $\angle BAC = 60^\circ$ de incentro I e circuncentro O. Seja O' o ponto diametralmente oposto a O na circunferência circunscrita do triângulo BOC. Demonstrar que

$$IO' = BI + IC.$$

PROBLEMA 6

Dizemos que a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros positivos é *alagoana* se para todo n inteiro positivo verificam-se simultaneamente as duas condições seguintes:

- $a_{n!} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
- a_n é a n-ésima potência de um inteiro positivo.

Determinar todas as sequências que são alagoanas.

(Observe que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Por exemplo, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Assim, nossa sequência satisfaz, por exemplo, $a_{24} = a_{4!} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$.)

Duração da prova: 4 horas

Versão Português

Cada problema vale 10 pontos