Prova dia 1

Domingo, 5 de outubro de 2014

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Valor: 10 pontos cada questão
Cada resposta deve ser justificada adequadamente.

1. Seja $g : [2013, 2014] \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as duas seguintes condições:
   - $g(2013) = g(2014) = 0$,
   - para quaisquer $a, b \in [2013, 2014]$, tem-se que $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq g(a) + g(b)$.

   Demonstre que g possui zeros em qualquer subintervalo aberto $(c, d) \subset [2013, 2014]$.

2. Sejam n um inteiro positivo e p um primo maior que 2. Mostre que:

$$(p-1)^n n! \,\big|\, (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1}) \, .$$

3. Dado $n \geq 2$, seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos do conjunto com n elementos $\{1, \ldots, n\}$ tal que, para quaisquer $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}$, se verifica que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leq n - 2$.

   Mostre que $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-2}$.

   Nota: $|X|$ designa a cardinalidade do conjunto X.

Prova dia 2

Segunda-feira, 6 de outubro de 2014

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Valor: 10 pontos cada questão
Cada resposta deve ser justificada adequadamente.

4. Seja (a_i) uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos. Definimos a sequência (s_k):

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]},$$

onde $[a_i, a_{i+1}]$ denota o mínimo múltiplo comum de a_i e a_{i+1}.

Mostre que a sequência (s_k) é convergente.

5. Uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se chama *interessante* se $f(z)$ é real ao longo da parábola $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$.

   a) Encontre um exemplo de uma função interessante que não seja constante.

   b) Prove que todas as funções interessantes f satisfazem $f'(-3/4) = 0$.

6. *a*) Seja (x_n) uma sequência com $x_n \in [0, 1]$ para todo n. Prove que existe $C > 0$ tal que, para todo inteiro positivo r, existem $m \geq 1$ e $n > m + r$ que cumprem $(n - m)|x_n - x_m| \leq C$.

   b) Prove que para todo $C > 0$ existem uma sequência (x_n) com $x_n \in [0, 1]$ para todo n e um inteiro positivo r tais que, se $m \geq 1$ e $n > m + r$, então $(n - m)|x_n - x_m| > C$.