VII Competencia Iberoamericana
Interuniversitaria de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM, México 2015

# Primeiro dia

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

25 de setembro de 2015

**Problema 1.** Encontre o número real $a$ tal que a integral definida

$$\int_{a}^{a+8} e^{-x} e^{-x^2} \, dx$$

alcança seu valor máximo.

**Problema 2.** Ache todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais que satisfazem a identidade

$$P(x^3 - 2) = P(x)^3 - 2 \, ,$$

para todo número real $x$.

**Problema 3.** Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Seja $k \geq 1$ um inteiro. Prove que para inteiros não nulos quaisquer $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j_1, j_2, \ldots, j_k$ e inteiros quaisquer $i_0, i_k$, se verifica

$$A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \ldots A^{i_{k-1}} B^{j_k} A^{i_k} \neq I.$$

*Nota:* $I$ denota a matriz identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Cada problema vale 10 pontos.**

**Tempo máximo: 4h 30m.**

VII Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM, México 2015

# Segundo dia

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

26 de setembro de 2015

**Problema 4.** Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha$ um número real tais que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha.$$

Mostre que para qualquer $r > 0$, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x - y = r$ e $f(x) = f(y)$.

**Problema 5.** Há $n$ pessoas sentadas em uma mesa circular que tem os lugares numerados de 1 a $n$ no sentido horário. Seja $k$ um inteiro fixo com $2 \leq k \leq n$. As pessoas podem trocar de lugar. Há dois tipos de movimentos permitidos:

1. Cada pessoa se move para o lugar vizinho no sentido horário.
2. Somente trocam de lugar as pessoas que se encontram nos lugares 1 e $k$.

Determine, em função de $n$ e $k$, o número de possíveis configurações de pessoas na mesa que podem ser obtidas, usando alguma sequência de movimentos permitidos.

**Problema 6.** Prove que existe um real $C > 1$ que satisfaz a seguinte propiedade: se $n > 1$ e $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ são inteiros positivos tais que $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ estão em progressão aritmética, então $a_0 > C^n$.

**Cada problema vale 10 pontos.**

**Tempo máximo: 4h 30m.**