VIII Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática

Primeiro dia

UEA — Universidade Estadual do Amazonas, Manaus

13 de setembro de 2016

Problema 1. Encontre todas as funções $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ que satisfazem

(i) $f(xf(y)) = yf(x)$, $\forall x, y > 0$,

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Problema 2. Uma jibóia de tamanho k é un grafo com $k+1$ vértices $\{0, 1, ..., k-1, k\}$ e arestas somente entre os vértices i e $i+1$ para $0 \leq i < k$. A jibóia se coloca em um grafo G mediante uma injeção de grafos. (Isto é, uma função injetiva dos vértices da jibóia nos vértices do grafo tal que, se existe uma aresta entre os vértices x, y da jibóia, então existirá uma aresta entre os vértices $f(x)$ e $f(y)$ em G).

A jibóia pode caminhar sobre o grafo G usando 2 tipos de movimentos de cada vez. Se a jibóia inicialmente estava nos vértices $f(0), f(1), ..., f(k)$, passa aos vértices $f'(0), f'(1), ..., f'(k)$ escolhidos de uma das seguintes 2 formas:

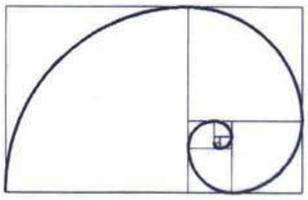
(i) Escolhe-se um vértice v adjacente a $f(k)$ tal que $v \notin \{f(0), f(1), ..., f(k)\}$ e a jibóia agora passa aos vértices $f'(0), ..., f'(k)$ com $f'(k) = v$ e $f'(i) = f(i+1)$ para $0 \leq i < k$.

(ii) O outro movimento possível é escolher $v \notin \{f(0), f(1), ..., f(k)\}$ adjacente a $f(0)$ e agora $f'(0) = v$ e $f'(i) = f(i-1)$ para $0 < i \leq k$.

Note que em ambos os casos f' é uma injeção de grafos. Prove que se G é un grafo conexo con diâmetro d então é possível colocar uma jibóia de tamanho $\lceil d/2 \rceil$ em G de tal maneira que a jibóia possa alcançar caminhando qualquer vértice de G.

Nota. Um grafo é conexo se para cada par de vértices existe um caminho (jibóia) entre eles. A distância entre dois vértices de um grafo conexo se define como o tamanho do caminho (jibóia) mais curto entre dois vértices. O diâmetro de um grafo é a maior destas distâncias.

Problema 3. Considere o retângulo R no plano cujos vértices são $(0, 0), (0, 1), (a, 1)$ e $(a, 0)$, onde $a = (\sqrt{5}+1)/2$. Considere uma espiral contida neste retângulo (como no desenho abaixo), passando pelos pontos $(0, 0), (1, 1)$ e tal que a curva é semelhante à sua interseção com o retângulo $\tilde{R}$ cujos vértices são $(1, 1), (a, 1), (a, 0)$ e $(1, 0)$ (e é semelhante a R).



(a) Quais são as coordenadas do "ponto limite" desta espiral ?

(b) Prove que esta curva não pode ser uma espiral logarítmica.

Nota. Uma espiral logarítmica é uma curva cuja equação em coordenadas polares é dada por $r = ce^{b\theta}$, ou seja, pode ser parametrizada por $(ce^{b\theta} \cos\theta, ce^{b\theta} \operatorname{sen}\theta)$, onde $b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e θ percorre os números reais ou uma semirreta de números reais.

A pontuação máxima de cada problema é de 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.

VIII Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática

Segundo dia

UEA — Universidade Estadual do Amazonas, Manaus

14 de setembro de 2016

Problema 4. Uma matriz A 2×2 é nilpotente se $A^2 = 0$. Seja N_s o conjunto das matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nilpotentes com entradas inteiras tais que $a = s$. Encontrar todos os números inteiros s tais que o conjunto N_s seja infinito.

Problema 5. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}^k$, $(k = 1, 2)$, é um *aberto denso* se,

(i) para todo $z \in A$, existe um $\delta > 0$ com $B(z, \delta) \subset A$, e

(ii) para todo $p \in \mathbb{R}^k$ e todo $\varepsilon > 0$, $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

onde $B(w, r) = \{q \in \mathbb{R}^k \mid ||q - w|| < r\}$ denota a bola aberta de centro w e raio r. Dizemos que $R \subset \mathbb{R}^k$ é um *residual* se existe uma sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos em $\mathbb{R}^k$ tais que $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset R$.

Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto denso então existe $U \subset \mathbb{R}$ aberto denso tal que, para todo $y \in U$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ é um aberto denso.

b) Se $R \subset \mathbb{R}^2$ é um residual então existe $S \subset \mathbb{R}$ residual tal que, para todo $y \in S$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in R\}$ é um residual.

Nota. O símbolo $||x||$ denota a norma euclidiana de x em $\mathbb{R}^k$. Se $x, y \in \mathbb{R}$, $||x|| = |x|$ e $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Problema 6. Determine todas as operações binárias comutativas e associativas no conjunto dos números inteiros $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

(i) $0 * 0 = 0$, e

(ii) $(x + z) * (y + z) = (x * y) + z$ para quaisquer x, y, z em $\mathbb{Z}$.

Nota. A operação $*$ é comutativa se $x * y = y * x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$; é associativa se $x * (y * z) = (x * y) * z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

A pontuação máxima de cada problema é de 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.