40ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase– Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

Problema 1.

Seja $GL_2(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 2×2 inversíveis com elementos reais. Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) com a seguinte propriedade: se $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ são tais que $A \cdot B^m = B^m \cdot A$ e $A \cdot B^n = B^n \cdot A$, então A e B comutam, i.e., $AB = BA$.

Problema 2.

Seja k um inteiro positivo e considere uma árvore T com k arestas. Seja K um grafo completo infinito e considere uma coloração qualquer das arestas de K. Suponha que, para todo subconjunto infinito $S \subset V(K)$, existe um vértice v de S tal que uma quantidade infinita de cores é usada nas arestas de $K[S]$ incidentes a v. Mostre que K contém uma cópia de T com todas as arestas de cores diferentes.

Observação: Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos. Um grafo K é completo se tem conjunto de vértices $V(K)$ e dois vértices distintos quaisquer de $V(K)$ formam uma aresta de K. Finalmente, $K[S]$ denota o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices S, i.e., o grafo constituído por todas as arestas de K que conectam dois vértices de S.

Problema 3.

Seja $f(x, y)$ um polinômio em duas variáveis reais tal que os polinômios $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são divisíveis por $x^2 + y^2 - 1$. Prove que existem um polinômio $g(x, y)$ e uma constante c tais que

$$f(x, y) = g(x, y)(x^2 + y^2 - 1)^2 + c.$$

Olimpíada Brasileira de Matemática

Problema 4.

Dado n inteiro positivo determine o valor máximo de

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3$$

para x_j, com $1 \leq j \leq n$, números reais satisfazendo $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ e $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$.

Problema 5.

Sejam $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função infinitamente diferenciável tal que:

1. Para todo k inteiro positivo e para todo real positivo x, $f^{(k)}(x) > 0$. ($f^{(k)}$ representa como de costume a k-ésima derivada).
2. Para todo m inteiro positivo, $f(m)$ é inteiro positivo.

Prove que para todo inteiro positivo n, $f(n) \geq 2^{n-1}$.

Problema 6.

Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.