Semana Olímpica 2019

Profª Ana Paula Chaves

apchaves.math@gmail.com

Nível U • Formas Lineares em Logaritmos *à la* Baker

1. Algébricos x Transcendentes

Um *número algébrico* é qualquer raiz, real ou complexa, de uma equação algébrica, ou seja de um polinômio, com coeficientes racionais. Em outras palavras, são as raízes de equações do tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

onde todos os $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são racionais e $a_0 \neq 0$. Um número que <u>não</u> é algébrico, é dito *transcendente*, ou seja, se o mesmo não é raíz de nenhum polinômio com coeficientes racionais. A palavra *transcendente*, vem do latim *transcendĕre* que significa 'transcender'. Esse termo foi usado pela primeira vez por G. Leibniz, em 1682, e segundo L. Euler, significa que esses números possuem o poder de transcender operações algébricas.

Se a equação (1) for irredutível, ou seja, se o lado esquerdo não pode ser escrito como o produto de dois polinômios com coeficientes racionais, então o seu grau será o *grau do algébrico* α que a satisfaz. Uma raíz de (1) quando $a_0 = 1$, é dita um *inteiro algébrico*. Denotamos por $\overline{\mathbb{Q}}$ o conjunto de todos os números algébricos.

Exemplo 1. Todo número racional p/q é algébrico de grau 1, pois satisfaz $qx - p = 0$, e tal polinômio é irredutível. Também temos números irracionais que são algébricos, tais como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ que satisfazem $x^2-2=0$ e $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$, respectivamente. Saindo do universo dos reais, temos números complexos, tais como i e $\sqrt[3]{4}i$ que também são algébricos, pois são raízes de $x^2 + 1 = 0$ e $x^6 + 16 = 0$.

Acabamos de ver alguns exemplos de números algébricos, mas e de números transcendentes? Bem, apesar da definição de transcendência datar do século XXVII, e L. Euler ter conjecturado a transcendência de e e π no século XXVIII, só foram conhecidos os primeiros exemplos de números transcendentes em 1844, quando J. Liouville, usando o fato de que algébricos não podem ser "muito bem" aproximados por racionais, mostrou que o número

$$\ell = \sum_{n\geq 1} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000001\ldots,$$

conhecido como *constante de Liouville*, era transcendente. Na verdade, Liouville fez bem mais que isso. Ele construiu uma classe de números, conhecidos como *Números de Liouville*, que é um conjunto não-enumerável de números transcendentes. Para mais detalhes, veja COLOCAR REF.

Apenas em 1873, C. Hermite provou a transcendência de e, e, 9 anos depois, F. Lindemann extendeu o método de Hermite para mostrar que π também é transcendente, como consequência da transcendência de e^α, para α algébrico não nulo. Em 1885, K. Weierstrass simplificou os trabalhos de Hermite e Lindemann e provou que: se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são números complexos, L.I. sobre $\mathbb{Q}$, então os números $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}$ são *algebricamente independentes*.

2. O Sétimo Problema de Hilbert

Em 1900, no 2º Congresso Internacional de Matemáticos (ICM), o alemão D. Hilbert apresentou a sua famosa lista de 23 problemas, que iriam guiar as pesquisas matemáticas no século seguinte. Vários destes problemas se tornaram bastante influentes e ajudaram no desenvolvimento de diversas áreas. Dentre eles, o 7º problema, inspirado nos resultados de Hermite e Lindemann, indagava sobre a transcendência de potências de algébricos. Mais precisamente: *A expressão α^β, para base algébrica e expoente algébrico não racional, por exemplo o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ou $e^\pi = i^{-2i}$, sempre representa um número transcendente, ou pelo menos irracional?*

Essa questão foi completamente resolvida, 34 anos após ser apresentada por Hilbert, de maneira independente, por dois matemáticos: A. O. Gelfond e T. Schneider, originando o famoso teorema a seguir.

Teorema 2 (Gelfond-Schneider)**.** Seja $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0,1\}$ e $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$. Então, α^β é transcendente.

Além de gerar incontáveis exemplos de números transcendentes, algo que não é trivial, o Teorema de Gelfond-Schneider possui uma consequência interessante sobre combinações lineares de logaritmos. Mais precisamente, temos o seguinte corolário:

Corolário 3. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ números algébricos não nulos, com $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então

$$\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 \neq 0.$$

Demonstração: Por contradição, suponha que existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 satisfazendo as hipóteses dadas, tais que

$$\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 = 0. \tag{2}$$

Então,

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\log\alpha_1}{\log\alpha_2} \;\Rightarrow\; \alpha_2 = \alpha_1^{-\beta_1/\beta_2}.$$

Assim, pelo Teorema de Gelfond-Schneider, $\beta_1/\beta_2 \in \mathbb{Q}$, pois caso contrário α_2 não seria algébrico. Agora, dividindo ambos os lados de (2) por β_2, conseguimos

$$\underbrace{\frac{\beta_1}{\beta 2}}_{\in\mathbb{Q}} \log\alpha_1 + \log\alpha_2 = 0,$$

o que contraria a independência linear de $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ sobre $\mathbb{Q}$. Portanto,

$$\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 \neq 0.$$

$\square$

Exemplo 4. Vamos mostrar que $\frac{\log 3}{\log 5}$ é um número transcendente, usando o Corolário 3. De fato, primeiro observe que $\log 3$ e $\log 5$ são $\mathbb{Q}$-L.I., pois caso contrário teríamos $3^a = 5^b$, para algum par a, b de inteiros, contradizendo o Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, se tivéssemos $\frac{\log 3}{\log 5} = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, então $\alpha \log 5 - \log 3 = 0$, contrariando o Corolário. Portanto, $\frac{\log 3}{\log 5}$ é transcendente.

3. O Teorema de Baker

O Corolário 3, nos dá uma importante reformulação do Teorema de Gelfond-Schneider: *Se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são números algébricos, então sua independência linear sobre $\mathbb{Q}$ e $\overline{\mathbb{Q}}$ são equivalentes.* Foi conjecturado, e então provado por A. Baker em 1966, que esse fato seria válido para uma quantidade qualquer de logaritmos. Precisamente,

Teorema 5 (Baker)**.** Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números algébricos não nulos, tais que $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ são $\mathbb{Q}$-L.I., então $1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ são $\overline{\mathbb{Q}}$-L.I.

A seguir, vamos apresentar algumas consequências deste importante teorema, fundamental para a distinção da Medalha Fields (1970), dentre outras honrarias, ao britânico A. Baker. Suas demonstrações, são deixadas como exercício para o leitor.

Teorema 6. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algébricos não nulos, e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números algébricos, tais que

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0. \tag{3}$$

Então, $\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$ é transcendente.

Teorema 7. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ são algébricos não nulos, então $e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é um número transcendente.

Teorema 8. Dado $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, então $\pi + \log \alpha$ é transcendente.

4. Formas Lineares em Logaritmo

O Teorema 6 nos diz que, somas do tipo $\Lambda = \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$, onde por exemplo os b_i's são inteiros e os α_i's são algébricos, têm duas possibilidades: podem ser nulas ou transcendentes. No segundo caso, quando $\Lambda \neq 0$, A. Baker mostrou, além da sua transcendência, que este número deve "respeitar" uma certa distância da origem. Mais precisamente, que temos nesse caso

$$|\Lambda| \geq (eB)^{-C}, \tag{4}$$

onde $B := \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$ e $C := C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, n)$ é uma constante computável.

A priori, esse pode parecer um fato não muito interessante, mas na realidade esaa é uma ferramenta que vem sendo utilizada por muitos matemáticos, com o intuito de encontrar soluções para equações Diofantinas exponenciais, ou até mesmo obter resultados assintóticos. O *método de Baker* consiste basicamente nos seguintes passos:

(1) Suponha que temos uma equação Diofantina $F(x, y) = 0$, onde queremos encontrar as soluções x, y nos inteiros positivos.

(2) Primeiro, usando desigualdades ou ferramentas algébricas, transformamos $F(x,y)=0$ em uma desigualdade da forma $|\Lambda| < k^{-x}$, onde $k>0$ é constante e $\Lambda = b_1 \log \alpha 1 + \cdots + b_t \log \alpha_t$ é uma forma linear não nula, com coeficientes algébricos dependendo da equação inicial.

(3) Usando os limitantes para formas lineares em logaritmo, como em (4), conseguimos $|\Lambda| > exp(-C\log x)$, onde C é uma constante.

(4) Combinando as desigualdades obtidas para $|\Lambda|$ em (2) e (3), obtemos

$$\frac{x}{\log x} < \frac{C}{\log k}.$$

(5) Como $x/\log x \to \infty$ quando $x \to \infty$, então a mesma não pode ser limitada donde apenas uma quantidade finita de valores podem satisfazer a desigualdade acima, e conseguimos um limitante superior $\max\{x,y\} < K$, para algum $K > 0$.

(6) Agora, com as variáveis limitadas, basta usar de ferramentas computacionais para verificar os casos $\max\{x,y\} < K$.

Após o resultado de A. Baker, vários refinamentos foram obtidos por diversos autores, principalmente ao restringir a quantidade de logaritmos da forma linear. Nessa direção, enunciamos dois resultados que vamos utilizar nas aplicações que virão posteriormente. Nestes resultados, utilizamos

Teorema 9 (Laurent-Mignotte-Nesterenko)**.** Sejam b_1, b_2 inteiros positivos e α_1, α_2 algébricos reais positivos, sendo multiplicativamente independentes. Seja $\Lambda = b_1 \log \alpha_1 - b_2 \log \alpha_2$, $d = [\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2):\mathbb{Q}]$ e A_1, A_2 tais que

$$\log A_i \geq \max\left\{h(\alpha_i), \frac{|\log \alpha_i|}{d}, \frac{1}{d}\right\}, \quad i = 1,2.$$

Além disso, tome

$$b' = \frac{b_1}{d\log A_2} + \frac{b_2}{d\log A_1}.$$

Então,

$$\text{(5)} \qquad \log|\Lambda| \geq -24.34 \cdot d^4 B^2 \log A_1 \log A_2,$$

onde $B = \max\left\{\log b' + 0.14, \frac{21}{d}, \frac{1}{2}\right\}$.

Note que o Teorema 9, é para o caso em que temos uma forma linear em apenas dois logaritmos, e com esse refinamento já se diminui bastante os limitantes originais de Baker (por exemplo, a constante 24.34 do resultado anterior, seria da ordem de 10^8 no Teorema original).

Teorema 10 (Matveev)**.** Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ números reais algébricos e $b_1, \ldots, b_t$ inteiros não nulos. Defina $\Lambda := \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_t^{b_t} - 1$. Sejam $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_t):\mathbb{Q}]$ e $A_1, \ldots, A_t$ números reais positivos satisfazendo

$$A_j \geq \max\{Dh(\alpha_j), |\log \alpha_j|, 0.16\},$$

para $j = 1,2,3$. Tome $B \geq \max\{|b_1|, \ldots, |b_t|\}$. Também defina $C_{t,D} := 1.4 \times 30^{t+3} \times t^{4.5} D^2 (1 + \log D)$.

Se $\Lambda \neq 0$, então

$$|\Lambda| > \exp(-C_{t,D}(1+\log B)A_1 \cdots A_t).$$

Nos resultados anteriores, temos que a *altura logarítmica*(ou *altura de Weil*) de um número algébrico α, de grau n, é dada por

$$h(\alpha) = \frac{1}{n}(\log |a| + \sum_{j=1}^{n} \log \max\{1, |\alpha^{(j)}|\}),$$

onde a é o coeficiente líder do polinômio minimal de α (sobre $\mathbb{Z}$) e $(\alpha^{(j)})_{1\leq j\leq n}$ são os conjugados de α.

5. Aplicações

1. Encontre todas as soluções naturais da equação

$$13^m - 46^n = 81,$$

2. Encontre todas as soluções da equação

$$9^m - 47^n = 544,$$

em inteiros positivos m, n.

3. Exiba um limitante para o número de soluções de

$$F_n = y^t,$$

onde $(F_n)_n$ é a famosa *Sequência de Fibonacci*.