# Princípio KISS
# Exercícios resolvidos no material

Prof. Armando Barbosa

25 de janeiro de 2019

---

**Problema 1** *(OBM/2015 - 3ª fase - N2)* Prove que existe um número que pode ser representado de pelo menos 2015 maneiras diferentes como soma de quadrados de números naturais não nulos, não necessariamente todos distintos. Considera-se que duas somas que alteram apenas a ordem das parcelas constituem uma mesma representação.
Por exemplo, $1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2 + 10^2$ e $5^2 + 12^2$ são duas maneiras distintas de escrevermos 169 como soma de quadrados.

**Problema 2** *(Cone Sul/2015)* Mostre que, para todo inteiro $n$, o número $n^3 - 9n + 27$ não é divisível por 81.

**Problema 3** *(Ibero/2017)* Para cada inteiro $n$, seja $S(n)$ a soma de seus algarismos. Dizemos que $n$ tem a propriedade $P$ se os termos da sequência infinita $n, S(n), S\left(S(n)\right), S\left(S\left(S(n)\right)\right), \cdots$ são todos pares, e dizemos que $n$ tem a propriedade $I$ se os termos desta sequência são todos ímpares. Mostre que, entre todos os inteiros positivos $n$ tais que $1 \leqslant n \leqslant 2017$, são mais os que têm a propriedade $I$ do que os que têm a propriedade $P$.

**Problema 4** *(USAMO/2017)* Prove que existem infinitos pares $(a, b)$ de inteiros maiores que 1, distintos e primos entre si tais que $a^b + b^a$ é divisível por $a + b$.

**Problema 5** *(OBM/2012 -3ª fase - N3)* Determine se existem inteiros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_{2012}$, todos maiores ou iguais a 2, tais que:

$$n^2 = a_1^2 + a_2^3 + a_3^5 + \cdots + a_i^{p_i} + \cdots + a_{2012}^{p_{2012}}$$

em que $p_i$ é o $i$-ésimo primo (ou seja, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\cdots$).

**Problema 6** *(Simulado N2 - SO/2017)* Prove que não é possível separar 6 inteiros positivos consecutivos em dois conjuntos de modo que o produto dos elementos de um conjunto seja igual ao produto dos elementos do outro conjunto.