Lista - Estimativas e Desigualdades

Semana Olimpíca/2018 - Nível 2

Prof. Armando

25 de janeiro de 2019

---

1 Lista de ideias

- Funções do 2° grau (ou graus maiores)
- Desigualdades básicas ($M.Q. \geqslant M.A. \geqslant M.G. \geqslant M.H.$ ou Cauchy)
- Trigonometria
- Somas telescópicas
- Racionalização/"Desracionalização"
- E etc..

2 Questões resolvidas no material

Problema 1 a) Mostre que

$$\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2 < 1+x+x^2+x^3+x^4 \leqslant \left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$$

b) Determine todas as soluções inteiras de $y^2 = 1+x+x^2+x^3+x^4$.

Problema 2 *(OCM/1998)* Prove que não existem inteiros positivos a e b tais que $\dfrac{b^2+b}{a^2+a} = 4$.

Problema 3 Encontre os valores mínimo e máximo de $T = a\cos\theta + bsen\theta$, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, sendo a e b reais positivos.

Problema 4 Prove que, dentre quaisquer cinco números reais y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5, existem dois que satisfazem $0 \leqslant \dfrac{y_i - y_j}{1 + y_i \cdot y_j} \leqslant 1$.

Problema 5 Sejam x, y e z inteiros positivos tais que $x + y + z = 60$. Determine o valor máximo de xy^2z^3.

Problema 6 *(OCM/2011)* Qual é o valor mínimo da expressão $\dfrac{126 + 14x^4}{2011x^2}$ no conjunto dos números reais diferentes de zero?

Problema 7 Mostre que

$$2\sqrt{101} - 2 < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} < 20$$

3 Outros problemas

Problema 8 *(APMO/2011)* Sejam a, b e c inteiros positivos. Prove que é impossível ter os três números $a^2 + b + c$, $b^2 + a + c$ e $c^2 + a + b$ sendo todos quadrados perfeitos.

Problema 9 *(Rioplatense/TST - Fortaleza/2014)* Sejam a e b números reais positivos. Prove a seguinte desigualdade

$$a^2 + b^2 + 1 \geqslant a \cdot \sqrt{b^2 + 1} + b \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

Problema 10 *(Rioplatense/TST - Fortaleza/2012)* Seja n um inteiro positivos. Determine todos os números reais x_1, x_2, $\cdots$, x_n que satisfazem a relação:

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2 \cdot \sqrt{x_2 - 2^2} + \cdots + n \cdot \sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Problema 11 *(Turquia/1998)* Seja (a_n) uma sequência de números reais definidas por:

$$\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

Para quantos valores distintos de t teremos $a_{1998} = 0$?

Problema 12 *(Rússia/2009)* Sejam a, b e c três números reais que satisfazem

$$\begin{cases} (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a) = abc \\ (a^3+b^3)\cdot(b^3+c^3)\cdot(c^3+a^3) = a^3b^3c^3 \end{cases}$$

Prove que $abc = 0$.

Problema 13 *(Rioplatense/2012)* Dizemos que um inteiro positivo n é apocalíptico se, entre seus divisores positivos, há seis cuja soma é igual a 3528. Por exemplo, 2012 é apocalíptico, pois seus seis divisores 1, 2, 4, 503, 1006 e 2012 somados resultam em 3528. Determine o nenor inteiro positivo apocalíptico.

Problema 14 *(Cone Sul/TST - 2018)*

a) Seja x um número real com $x \geq 1$. Prove que $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geqslant 0$.

b) Sejam $a, b \geqslant 1$ números reais. Determine o valor mínimo da expressão $ab(a+b-10) + 8(a+b)$. Determine também os pares de números reais (a, b) que fazem com que essa expressão seja igual a esse valor mínimo.

Problema 15 *(Lusofonia/2016)* Suponha que um número real α é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros $P(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$. Considere, então, $G = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0|$. Dizemos que G é um gingado de α. Por exemplo, como 2 é raíz de $P(x) = x^2 - x - 2$, $G = |1| + |1| + |2| = 4$ é um gingado de 2. Qual é o quarto maior número real α tal que 3 é um gingado de α?

Problema 16 *(USA/TST - 2016)* Seja $\sqrt{3} = 1, b_1 b_2 \cdots_{(2)}$ a representação binária de $\sqrt{3}$. Prove que, para todo inteiro positivo n, pelo menos um dos dígitos b_n, b_{n+1}, $\cdots$, b_{2n} é igual a 1.

Problema 17 *(Ibero/2015)* Encontre todos os pares de inteiros (a, b) tais que

$$\left(b^2 + 7\cdot(a-b)\right)^2 = a^3 \cdot b$$

Problema 18 *(IMO/SL - 2017/A1)* Sejam a_1, a_2, $\cdots$, a_n, k, M inteiros positivos tais que:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{e} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = M$$

Se $M > 1$, prove que o polinômio

$$P(x) = M \cdot (x+1)^k - (x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot \cdots \cdot (x+a_n)$$

não tem raízes positivas.

Problema 19 *(EGMO/2014)* Determine todas as constantes reais t tais que sempre que a, b e c forem lados de um triângulo, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ e $c^2 + abt$ também serão.

Problema 20 *(Cone Sul/TST - 2015)* Seja n um inteiro positivo e x_1, x_2, $\cdots$, x_n números reais positivos tais que:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}$$

Mostre que para todo $k \leqslant n$ existem k números entre x_1, x_2, $\cdots$, x_n cuja soma é maior ou igual a k.

Problema 21 *(IMO/SL - 2016/A1)* Sejam a, b e c números reais positivos tais que $ab \geqslant 1$, $bc \geqslant 1$ e $ca \geqslant 1$. Prove que:

$$\sqrt[3]{(a^2+1)\cdot(b^2+1)\cdot(c^2+1)} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1$$

Problema 22 *(IMO/2011)* Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, seja $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Seja n_A o número de pares (i, j) com $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ para os quais $a_i + a_j$ é divisor de s_A. Encontre todos os conjuntos A de quatro inteiros postivos distintos para os quais o valor de n_A é máximo.

3.1 Desafio

Problema 23 *(Sérvia/2016)* Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_{2^{2016}}$ inteiros positivos tais que, para todo $1 \leqslant n \leqslant 2^{2016}$, temos que $a_n \leqslant 2016$ e $a_1a_2\cdots a_n + 1$ é um quadrado perfeito. Prove que pelo menos um dos números $a_1, a_2, \cdots, a_{2^{2016}}$ é igual a 1.

3.2 Dicas das questões da seção anterior

Problema 8 Suponha s.p.g. $a \leqslant b \leqslant c$. Analise $c^2 + a + b$.

Problema 9 $a \cdot \sqrt{b^2+1} = \sqrt{a^2 \cdot (b^2+1)}$.

Problema 10 $t \cdot \sqrt{x_t - t^2} = \sqrt{t^2 \cdot (x_t - t^2)}$.

Problema 11 Prove, indutivamente, que $a_1 = t < 0$ gera que $a_n < 0$ para todo n inteiro positivo. Depois, mostre que $a_1 = t > 1$ não gera solução também. Por último, faça a substituição trigonométrica com $a_i = sen^2\theta_i$.

Problema 12 Para todo x e y reais, prove que $x^2 - xy + y^2 \geqslant |xy|$. Quando ocorre a igualdade?

Problema 13 Analise o "caso extremo", isto é, se os seis maiores divisores de n forem $n, \frac{n}{2}, \cdots, \frac{n}{6}$.

Problema 14

a) Escreva $-5x^2$ como $-x^2 - 4x^2$.

b) Comece com

$$ab(a+b-10) + 8(a+b) = (a+b)(ab+8) - 10ab \geqslant 2\sqrt{ab}(ab+8) - 10ab$$

Daí, considere a substituição $t = \sqrt{ab}$. A resposta é $(a,b) = (1,1)$ ou $(a,b) = (2,2)$.

Problema 15 Analise os casos $P(x) = x^n - 2$ e $P(x) = x^a - x^b - 1$, com $a > b \geqslant 1$. No segundo caso, pode-se dividir em outros subcasos: $a \leqslant 3$ e $a \geqslant 4$.

Problema 16 Suponha o contrário. Dai, teríamos que existem k e n tais que: $2^{n-1} \cdot \sqrt{3} = \underbrace{1b_1 \cdots b_{n-1}}_{k}, \underbrace{0 \cdots 0}_{(n+1)\ 0's}\ b_{2n+1} \cdots_{(2)}$.

Problema 17 Desenvolvendo algebricamente a equação do enunciado, podemos chegar a conclusão de que $a = b$ ou uma equação do 2° em função de a é igual a 0. Daí, podemos estudar o Δ.

Problema 18 Aplicar $M.A. \geqslant M.G.$ considerando $(x+1)$ um termo e outros $(a_i - 1)$'s uns.

Problema 19 A resposta é o intervalo $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$. Encontre contraexemplos para $t < \frac{2}{3}$ e para $t > 2$ e depois prove a resposta.

Problema 20 Suponha que não. A partir disso, chegue a $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < n$. Agora, basta usar a condição do enunciado para concluir um absurdo.

Problema 21 Prove que para x, y reais positivos, com $xy \geqslant 1$, temos que

$$(x^2+1)(y^2+1) \leqslant \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1\right)^2$$

Problema 22 Prove que $n_A \leqslant 4$, por exemplo, ordenando os a_i's. Depois, com algum algebrismo, é possível chegar as duas únicas soluções: $\{(x, 5x, 7x, 11x) : x > 0\}$ e $\{(x, 11x, 19x, 29x) : x > 0\}$.

Problema 23 Prove o seguinte lema: Sejam a, b inteiros positivos tais que $a + 1$ e b são quadrados perfeitos, com $a > b > 1$. Então, $ab + 1$ não é quadrado perfeito.