Polinômios com TN
Exercícios resolvidos no material

Prof. Armando Barbosa

22 de janeiro de 2019

Problema 1 *(Rússia/2017)* Sejam a, b e c três inteiros positivos dados, dois a dois distintos. Existe um polinômio do 2° grau $P(x) = kx^2 + lx + m$, com k, l e m inteiros e $k > 0$, tal que existem outros três inteiros d, e e f para os quais temos que $P(d) = a^3$, $P(e) = b^3$ e $P(f) = c^3$?

Problema 2 *(IMO/SL - 2005)* Sejam a, b, c, d, e e f números inteiros positivos. Sabendo que a soma $S = a + b + c + d + e + f$ divide tanto $(abc + def)$ como $(ab + bc + ca - de - ef - fd)$, prove que S é composto.

Problema 3 *(Vietnã/2017)* Existe algum polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros que satisfaz:

$$\begin{cases} P(1 + \sqrt[3]{2}) = 1 + \sqrt[3]{2} \\ P(1 + \sqrt{5}) = 2 + 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Problema 4 *(Belarus/2017)* Seja $\overline{a_n \cdots a_1 a_0}$ a representação decimal de 65^k para algum $k \geqslant 2$. Prove que o polinômio $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ não possui raízes racionais.

Problema 5 *(Bulgária/2018)* Dado um polinômio $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_2 x^2 + a_0$ com coeficientes inteiros positivos e grau $d \geqslant 2$, considere a sequência:

$$b_1 = a_0 \qquad b_{n+1} = P\left(b_n\right) \quad \forall n \geqslant 1$$

Prove que $\forall n \geqslant 2$ existe um número primo p tal que p divide b_n e não divide $b_1 \cdots b_{n-1}$.

Problema 6 *(Sérvia/TST - 2013)* Nós chamamos os polinômios $A(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $B(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, com $a_n b_m \neq 0$, de *semelhantes* se as seguintes condições acontecem:

i) $n = m$;

ii) Existe uma permutação π do conjunto $\{0, 1, \cdots, n\}$ tal que $b_i = a_{\pi(i)}$ para cada $0 \leqslant i \leqslant n$.

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios semelhantes com coeficientes inteiros. Dado que $P(16) = 3^{2012}$, encontre o menor valor possível de $|Q\left(3^{2012}\right)|$.

Problema 7 *(Coreia do Sul/2018)* Determine se existe ou não dois polinômios P e Q, cada um com grau não menor que 2018, com coeficientes inteiros e tais que:

$$P\left(Q(x)\right) = 3Q\left(P(x)\right) + 1$$

é verdade para todo número real x.