Polinômios com TN

Semana Olimpíca/2019 - Nível 3

Prof. Armando Barbosa

22 de janeiro de 2019

Há algum tempo, no mundo das olimpíadas de matemática, tem aparecido questões que "misturam"assuntos como, por exemplo, teoria combinatória dos números, geometria combinatória, funções com teoria dos números e etc. A ideia principal desse material será apresentar algumas ideias para resolver questões que envolvem polinômios com teoria dos números. Para isso, esse material está estruturado da seguinte forma:

1. Analisar valores
    1.1. Construir um polinômio esperto
    1.2. Provar a inexistência do polinômio
2. Analisar alguma propriedade polinomial
3. Analisar alguma propriedade de TN
4. Outras ideias

Antes de continuar, é válido ressaltar que, normalmente, as questões que envolvem esse assunto são do tipo "ou você já viu antes alguma ideia parecida e consegue evoluir ou não consegue desenvolver", fato esse que aumenta a importância desse material. Outro fato importante a ser citado é que <u>será considerado que o leitor tem conhecimento prévio mínimo da teoria de polinômios como, por exemplo, divisão de polinômios e polinômio minimal.</u>

Sem mais delongas, vamos ao que interessa.

1 Analisar valores

Comecemos, então, pelo mais simples: analisar valores. As questões desse tipo envolvem, com frequência, uma das duas situações a seguir:

- encontrar um exemplo de polinômio que satisfaça uma propriedade específica definida no enunciado;
- provar que o polinômio não existe.

Para entender melhor, vejamos um exemplo:

Problema 1 *(Rússia/2017)* Sejam a, b e c três inteiros positivos dados, dois a dois distintos. Existe um polinômio do 2° grau $P(x) = kx^2 + lx + m$, com k, l e m inteiros e $k > 0$, tal que existem outros três inteiros d, e e f para os quais temos que $P(d) = a^3$, $P(e) = b^3$ e $P(f) = c^3$?

Solução: Sim. Basta tomar:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - (x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c) \\ &= \underbrace{(a+b+c)}_{k>0} - (ab+bc+ca)\cdot x + abc \end{aligned}$$

Se analisarmos bem o enunciado não parecia díficil pensar no polinômio da primeira linha. Para fixar melhor essa ideia de tomar um polinômio "esperto", estudemos a próxima subseção:

1.1 Construir o polinômio esperto

O objetivo dessa subseção é apresentar ideias para montar um polinômio "esperto"que resolva a questão. Vejamos um exemplo disso:

Problema 2 *(IMO/SL - 2005)* Sejam a, b, c, d, e e f números inteiros positivos. Sabendo que a soma $S = a+b+c+d+e+f$ divide tanto $(abc+def)$ como $(ab+bc+ca-de-ef-fd)$, prove que S é composto.

Solução: Consideremos o polinômio:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c) - (x-d)\cdot(x-e)\cdot(x-f) \\ &= Sx^2 + Qx + R \end{aligned}$$

sendo $Q = (ab+bc+ca-de-ef-fd)$ e $R = abc+def$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} S \mid Q, R \Rightarrow S \mid P(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \boxed{S \mid P(d) = (d+a)\cdot(d+b)\cdot(d+c)} \end{aligned}$$

Por outro lado, como a, b, c e d são inteiros positivos, temos que:

$$S > \max\{d+a, d+b, d+c\} \Rightarrow S \nmid d+a \quad S \nmid d+b \quad S \nmid d+c$$

Portanto, S é composto, pois, caso contrário, pelo fato de $S \mid P(d)$, então ele dividiria pelo menos um elemento do conjunto $\{d+a, d+b, d+c\}$. ■

Notemos que, a partir de uma análise curta e descuidada do enunciado da questão anterior, ela não parece ser uma questão de polinômio. Daí, ressalta-se mais uma vez aquela famosa dica de que somente o treino exaustivo de questões pode levar um aluno a ser mais experiente nas questões de olimpíada de matemática.

Para não ficarmos induzidos a sempre pensar que toda questão de polinômio começa sempre com a tomada de um polinômio "esperto", estudemos a subseção a seguir.

1.2 Provar que o polinômio não existe

Problema 3 *(Vietnã/2017)* Existe algum polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros que satisfaz:

$$\begin{cases} P(1+\sqrt[3]{2}) = 1+\sqrt[3]{2} \\ P(1+\sqrt{5}) = 2+3\sqrt{5} \end{cases}$$

Solução: Suponha que existe tal polinômio. Considere a substituição $Q(x) = P(x) - 1$. Daí, temos que $Q(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros tal que:

$$\begin{cases} Q(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} \\ Q(\sqrt{5}) = 1+3\sqrt{5} \end{cases}$$

Do primeiro resultado, temos que $\sqrt[3]{2}$ é raíz de $Q(x) - x$. Como o polinômio minimal de $\sqrt[3]{2}$ é $x^3 - 2$, então temos que: $x^3 - 2 \mid Q(x) - x$.

Em outras palavras, podemos afirmar que existe um polinômio $R(x)$ com coeficientes inteiros tal que:

$$Q(x) - x = \left(x^3 - 2\right) \cdot R(x)$$

Como $R(x)$ tem coeficientes inteiros, então temos que existem a, b inteiros tais que $R(\sqrt{5}) = a + b\sqrt{5}$. Daí, substituindo $x = \sqrt{5}$ em todas as equações já destacadas até aqui, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} Q\left(\sqrt{5}-\sqrt{5}\right) &= \left[\left(\sqrt{5}\right)^3 - 2\right] \cdot \left(a + b\sqrt{5}\right) \\ 1 + 3\sqrt{5} - \sqrt{5} &= \left(5\sqrt{5} - 2\right) \cdot \left(a + b\sqrt{5}\right) \\ 1 + 2\sqrt{5} &= (25b - 2a) + (5a - 2b)\sqrt{5} \end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$\begin{cases} (25b - 2a = 1)\,.5 \\ (5a - 2b = 2)\,.2 \end{cases} \Rightarrow 121b = 9 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$$

Concluindo, portanto, um absurdo! ■

Notemos que, na solução anterior, foram importantes conceitos como manipulação algébrica (substituição de polinômios) e polinômio minimal. Aproveitemos, então, para ressaltar a importância do conhecimento teórico de polinômios para a a melhor compreensão dos assuntos desse material.

2 Analisar alguma propriedade polinomial

Em algumas questões de polinômios com TN, não estamos interessados em analisar os valores em busca de provar a existência ou não de um polinômio, mas de analisar outras propriedades relacionadas a polinômios como, por exemplo, as raízes. Vejamos um exemplo dessa ideia.

Problema 4 *(Belarus/2017)* Seja $\overline{a_n \cdots a_1 a_0}$ a representação decimal de 65^k para algum $k \geqslant 2$. Prove que o polinômio $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ não possui raízes racionais.

Solução: Suponha que há raíz. Como todos os a_i's são não negativos, então, se há raíz, ela é negativa. Daí, seja $-\dfrac{p}{q}$ uma de tais raízes com p, q inteiros não negativos e $mdc(p,q)=1$. Daí, temos que:

$$P(x) = a_n \cdot \left(-\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1 \cdot \left(-\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \tag{1}$$

Pelo algoritmo de divisão de polinômios, existem b_i's racionais $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ tais que:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \underbrace{(qx+p)}_{-\frac{p}{q}\text{é raiz}} \cdot \left(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\right) \tag{2}$$

sendo

$$\begin{cases} a_0 = p \cdot b_0 \\ a_n = q \cdot b_{n-1} \\ a_i = p \cdot b_i + q \cdot b_{i-1} \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases} \tag{3}$$

Provemos que os b_i's são inteiros. Para isso, da recorrência anterior, podemos concluir que:

$$b_i = a_i \cdot \frac{1}{p} - a_{i-1} \cdot \frac{1}{p^2} + a_{i-2} \cdot \frac{q^2}{p^3} - \cdots + (-1)^i \cdot a_0 \cdot \frac{q^i}{p^{i+1}} \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

Portanto, podemos concluir que:

$$b_i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p^{i+1} \mid a_i \cdot p^i - a_{i-1} \cdot p^{i-1} \cdot q + \cdots + (-1)^i \cdot a_0 \cdot q^i \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

Sendo tal fato verdadeiro a partir de $(1) \cdot q^n$.

Agora, calculemos alguns a_i's e b_i's pequenos. De $65^k = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$, temos que:

$$\boxed{a_0 = 5} \qquad \boxed{a_1 = 2} \qquad \boxed{a_2 = \begin{cases} 2, \text{ se } k = 2 \\ 6, \text{ se } k \geqslant 3 \end{cases}}$$

Fazendo $x = 10$ em (2), temos que:

$$P(10) = 65^k = (10q+p) \cdot [100 \cdot Q(10) + 10b_1 + b_0] \tag{4}$$

sendo $Q(x) = b_{n-1} \cdot x^{n-3} + \cdots + b_3 \cdot x^2 + b_2$ um polinômio com coeficientes inteiros.

São fatos conhecidos relacionados às raízes dos polinômios

$$\begin{cases} p \mid a_0 \Rightarrow p \mid 5 \Rightarrow \boxed{p = 1 \text{ ou } p = 5} \\ q \mid a_n \text{ e } a_n \text{ é dígito } \Rightarrow \boxed{q \leqslant a_n \leqslant 9} \end{cases}$$

Daí, finalmente, temos dois casos para concluir a questão:

Caso 1: Se $p = 1$:

De (4), temos que $(10q+1) \mid 65^k$.

Por outro lado, $1 \leqslant q \leqslant 9$. Daí, olhando todos os $(10q+1)$'s, vemos que esse caso não gera solução.

Caso 2: Se $p = 5$:

De (4), temos que $(10q+5) \mid 65^k$.

Por outro lado, $1 \leqslant q \leqslant 9$. Daí, olhando todos os $(10q+1)$'s, vemos que esse caso ainda poderia gerar duas soluções: $q = 2$ ou $q = 6$. Analisemos cada um desses casos:

Caso 2.1: Se $q = 2$:
De (3), temos que:

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & p \cdot b_0 \xRightarrow{(a_0,p)=(5,5)} b_0 = 1 \\ a_1 & = & p \cdot b_1 + q \cdot b_0 \xRightarrow{(a_1,p,q)=(2,5,2)} b_1 = 0 \\ a_2 & = & p \cdot b_2 + q \cdot b_1 \xRightarrow{(a_2,p,q,b_1)=(2 \text{ ou } 6,5,2,0)} (2 \text{ ou } 6) = 5 \cdot b_2 + 0 \Rightarrow b_2 \notin \mathbb{Z} \end{array}$$

Caso 2.1: Se $q = 6$:
De (3), temos que:

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & p \cdot b_0 \xRightarrow{(a_0,p)=(5,5)} b_0 = 1 \\ a_1 & = & p \cdot b_1 + q \cdot b_0 \xRightarrow{(a_1,p,q)=(2,5,6)} 2 = 5 \cdot b_1 + 6 \Rightarrow b_1 \notin \mathbb{Z} \end{array}$$

Concluindo, assim, o absurdo. ■

Nem sempre as questões de polinômios com teoria dos números exige tantos conhecimentos técnicos de polinômios. Às vezes, é necessário o contrário: muito conhecimento de teoria dos números e pouco de polinômio. Para entender melhor quando pode ocorrer esse segundo caso, iremos para a próxima seção.

3 Analisar alguma propriedade de TN

Em outras questões, apesar de envolverem polinômios, o objetivo é estudar alguma propriedade relacionada a TN. Para entender melhor, vejamos uma questão a seguir que envolve v_p.

Problema 5 *(Bulgária/2018)* Dado um polinômio $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_2 x^2 + a_0$ com coeficientes inteiros positivos e grau $d \geqslant 2$, considere a sequência:

$$b_1 = a_0 \qquad b_{n+1} = P(b_n) \quad \forall n \geqslant 1$$

Prove que $\forall n \geqslant 2$ existe um número primo p tal que p divide b_n e não divide $b_1 \cdots b_{n-1}$.

Solução: Suponha que não existe tal primo. Daí, temos que existe $n \geqslant 2$ tal que para todo fator primo $p \mid b_n$ implica que $p \mid b_j$ para algum $1 \leqslant j \leqslant (n-1)$.

Tome p um fator primo de b_n e seja $b_n = p^r \cdot \ell$, com $mdc(p, \ell) = 1$. Daí, temos que:

$$\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & P(b_n) \\ & = & a_d \cdot (p^r \cdot \ell)^d + \cdots + a_2 \cdot (p^r \cdot \ell)^2 + a_0 \\ & \equiv & a_0 = b_1 \pmod{p^{r+1}} \end{array}$$

Analogamente, por indução, podemos concluir que:

$$b_{n+i+1} = P(b_{n+i}) \equiv P(b_i) = b_{i+1} \pmod{p^{r+1}}$$

e, portanto, por indução, segue que:

$$b_n \equiv b_{2n} \equiv \cdots \equiv b_{kn} \equiv \cdots \pmod{p^{r+1}}$$

Sendo $v_p(b_n) = r$, conclui-se que:

$$r = v_p(b_n) = v_p(b_{2n}) = \cdots = v_p(b_{kn}) = \cdots$$

Seja j tal que $p \mid b_j$ para algum $1 \leqslant j \leqslant (n-1)$.
Analogamente, temos que:

$$v_p(b_j) = v_p(b_{2j}) = \cdots = v_p(b_{kj}) = \cdots$$

E consequentemente, podemos concluir que:

$$r = v_p(b_n) = v_p(b_{jn}) = v_p(b_j) \Rightarrow \boxed{v_p(b_j) = r}$$

Portanto, para todo fator primo p de b_n, temos que existe um j, com $1 \leqslant j \leqslant (n-1)$, tal que $v_p(b_n) = v_p(b_j)$. Daí, temos que:

$$b_n \mid b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_{n-1} \Rightarrow \boxed{b_n \leqslant b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_{n-1}} \tag{5}$$

Por outro lado, temos que:

$$b_n = P(b_{n-1}) > b_{n-1}^2 \Rightarrow b_{n-1} < \sqrt{b_n}$$

De forma análoga, por indução, podemos concluir que:

$$b_{n-k} < \sqrt{b_{n-k+1}} < \sqrt[4]{b_{n-k+2}} < \cdots < b_n^{\frac{1}{2^k}}$$

Daí, fazendo um produto telescópico, temos que:

$$\begin{aligned} 0 < b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_{n-1} &< b_n^{\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot b_n^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdot \cdots \cdot b_n^{\frac{1}{2^1}} \\ &< b_n^{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}} < b_n \end{aligned}$$

Fato esse que é absurdo com (5). ■

Notemos que a questão anterior era basicamente uma questão de sequências com TN que envolvia quase nenhum conhecimento de polinômio. Por causa disso, algumas questões que aparentemente envolvem sequências e TN, sem parecerem envolverem polinômios, aparecerão na lista de exercícios extras. Há inclusive algumas que resolvem de forma semelhante a resolvida aqui.

Para finalizar nosso estudo, vejamos duas soluções que concluirão nossos estudos desse assunto.

4 Outras ideias

Nessa seção, destinaremos a ver ideias avulsas na solução de duas questões distintas sobre o tema desse material de forma a complementar nossos estudos e, ao mesmo tempo, revisar ideias já vistas nos nossos estudos até aqui,

Problema 6 *(Sérvia/TST - 2013)* Nós chamamos os polinômios $A(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $B(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, com $a_n b_m \neq 0$, de *semelhantes* se as seguintes condições acontecem:

i) $n = m$;

ii) Existe uma permutação π do conjunto $\{0, 1, \cdots, n\}$ tal que $b_i = a_{\pi(i)}$ para cada $0 \leqslant i \leqslant n$.

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios semelhantes com coeficientes inteiros. Dado que $P(16) = 3^{2012}$, encontre o menor valor possível de $|Q(3^{2012})|$.

Solução 1: Sabendo que $3^{2012} \equiv 1 \pmod 5$, segue que:

$$Q\left(3^{2012}\right) \equiv Q(1) = P(1) \equiv P(16) \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow \boxed{\left|Q\left(3^{2012}\right)\right| \geqslant 1}$$

Agora, vamos construir os polinômios P e Q satisfazendo as condições do enunciado de forma que $Q(3^{2012}) = 1$. Sejam $P(x) = ax^2 + bx + c$ e $Q(x) = cx^2 + ax + b$. Denotando $m = 16$ e $n = 3^{2012}$, desejamos então que o sistema:

$$\begin{cases} am^2 + bm + c = n \\ cn^2 + an + b = 1 \end{cases}$$

possua alguma solução (a, b, c) inteira. Isolando c na primeira equação e colocando na segunda, temos que:

$$c = n - am^2 - bm$$
$$n^2\left(n - am^2 - bm\right) + an + b = 1$$
$$\boxed{n\left(m^2 n - 1\right) a + \left(mn^2 - 1\right) b = n^3 - 1}$$

Daí, basta que a última equação tenha solução (a, b) inteira. Pelo teorema de Bèzout, isso é equivalente a:

$$mdc\left(n\left(m^2 n - 1\right), \left(mn^2 - 1\right)\right) \Big| \, n^3 - 1$$

fato que é verdadeiro, pois:

$$\begin{cases} d \mid n\,(m^2 n - 1) \\ d \mid (mn^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow d \mid n\left(m^2 n - 1\right) - m\left(mn^2 - 1\right) \Rightarrow d \mid m - n$$
$$\Rightarrow d \mid \left(mn^2 - 1\right) - n^2\,(m - n) \Rightarrow d \mid n^3 - 1$$

■

Solução 2: Como demonstrado na parte inicial da primeira solução: $Q(3^{2012}) \neq 0$.

Para provar que $Q(3^{2012}) = 1$ sabendo que $P(3^{2012}) \equiv Q(3^{2012}) \pmod{3^{2012} - 1}$, nós vamos impor uma condição extra:

$$P\left(3^{2012}\right) = P(16) = 3^{2012}$$

Daí, temos que:

$$P(x) = (x - 16) \cdot \left(x - 3^{2012}\right) \cdot R(x) + 3^{2012} \tag{6}$$

sendo R um polinômio que será escolhido (será provado posteriormente a existência de tal R) de forma que P seja da forma:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + (c+1)x + c$$

para algum $c \in \mathbb{Z}$. Daí, tomando Q da forma:

$$Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + cx + (c+1)$$

teremos, então, que:

$$Q\left(3^{2012}\right) = P\left(3^{2012}\right) - \left(3^{2012} - 1\right) = 1$$

Agora, falta provar só a existência de R. Tomemos $R(x) = ax + b$. Notemos que os últimos dois termos de $P(x)$ em (6) são:

$$\left[16 \cdot 3^{2012}a - \left(16 + 3^{2012}\right)b\right]x \qquad 16 \cdot 3^{2012}b + 3^{2012}$$

Com isso, para que tenhamos a solução (a, b) inteira desejada (e consequentemente o R desejado), basta que a equação abaixo tenha solução:

$$16 \cdot 3^{2012}a - \left(16 \cdot 3^{2012} + 16 + 3^{2012}\right)b = 1$$

fato que é verdadeiro pelo teorema de Bèzout, pois $mdc\left(16 \cdot 3^{2012}, (16 \cdot 3^{2012} + 16 + 3^{2012})\right) = 1$. ■

Problema 7 *(Coreia do Sul/2018)* Determine se existe ou não dois polinômios P e Q, cada um com grau não menor que 2018, com coeficientes inteiros e tais que:

$$P(Q(x)) = 3Q(P(x)) + 1$$

é verdade para todo número real x.

Solução 1: A resposta é sim.

Vamos tentar, recursivamente, encontrar soluções para a equação polinomial do enunciado. Seja $(P(x), Q(x))$ uma solução polinomial para equação do enunciado para todo x real. Matematicamente, temos que:

$$P(Q(x)) = 3Q(P(x)) + 1$$

Substituindo x por $P(Q(P(x)))$, podemos concluir que:

$$P(Q(P(Q(P(x))))) = 3Q(P(P(Q(P(x))))) + 1$$

E, portanto, temos que $(P(Q(P(x))), Q(P(x)))$ é também uma solução polinomial para equação do enunciado para todo x real concluindo, assim, nossa recorrência.

Daí, tomemos $P_0(x) = x^2 + 3x + 1$ e $Q_0(x) = 3x^2 + 9x + 6$. Notemos que $(P_0(x), Q_0(x))$ satisfaz a equação do enunciado. Agora, definamos as recorrências polinomiais a seguir:

$$P_{n+1}(x) = P_n(Q_n(P_n(x))) \qquad Q_{n+1}(x) = Q_n(P_n(x))\, \forall n \geqslant 0$$

Pela recorrência já demonstrada, temos que $(P_n(x), Q_n(x))$ satisfaz a equação polinomial do enunciado para todo n inteiro não negativo. Além disso, como estamos apenas fazendo operações de soma e produto, é imediato ver que $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ têm ambos coeficientes inteiros. Por último, podemos ver que cada recorrência aumenta os graus de $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ de forma que, certamente, para algum n, teremos os graus de $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ passando de 2018.

Portanto, fica provada a existência de tais polinômios. ■

Solução 2: Sim. Basta perceber que os polinômios a seguir:

$$P_n(x) = \frac{(6x+3)^n - 1}{2} \qquad P_n(x) = \frac{(6x+3)^{n-1} - 1}{2}$$

são solução. Daí, basta fazer $n = 2019$. ■

Chegamos, aqui, ao fim de nossos estudos. Para melhor assimilar o assunto, tentemos resolver cada um dos exercícios extras a seguir.

5 Exercícios extras

Problema 8 *(Polônia/2016)* Seja p um número primo. Encontre todos os números não negativos n para os quais o polinômio $P(x) = x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2$ pode ser reescrito como produto de dois polinômios quadráticos P_1 e P_2, sendo ambos polinômios com coeficientes inteiros.

Problema 9 *(Hong Kong/TST - 2018)* Encontre todos os polinômios P com todos os coeficientes inteiros não negativos tais que $P(1) = 7$ e $P(2) = 2017$.

Problema 10 *(Lusofonia/2016)* Suponha que um número real α é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros $P(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$. Considere, então, $G = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0|$. Dizemos que G é um gingado de α. Por exemplo, como 2 é raíz de $P(x) = x^2 - x - 2$, $G = |1| + |1| + |2| = 4$ é um gingado de 2. Qual é o quarto maior número real α tal que 3 é um gingado de α?

Problema 11 *(Rússia/2016)* Seja n um inteiro positivo e sejam $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{2n}$ inteiros não-nulos tais que $k_0 + k_1 + \cdots + k_{2n} \neq 0$. É sempre possível encontrar uma permutação $(a_0, a_1, \cdots, a_{2n})$ tal que a equação

$$a_{2n} \cdot x^{2n} + a_{2n-1} \cdot x^{2n+1} + \cdots + a_0 = 0$$

não tenha raízes inteiras?

Problema 12 *(Grécia/2017)* Seja u a raíz positiva da equação $x^2 + x - 4 = 0$. Sendo n um inteiro positivo, sabe-se que o polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

tem coeficientes inteiros não negativos e $P(u) = 2017$.

a) Prove que $a_0 + a_1 + \cdots + a_n \equiv 1 \pmod 2$.

b) Encontre o valor mínimo possível da expressão $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

Problema 13 *(Canadá/2016)* Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes inteiros tais que $P\left(P(n) + n\right)$ é um número primo para infinitos valores inteiros n.

Problema 14 *(IMO/SL - 2011)* Considere um polinômio $P(x) = \prod_{j=1}^{9}(x + d_j)$, onde $d_1, d_2, \cdots, d_9$ são nove inteiros distintos. Prove que existe um inteiro N, tal que para todos inteiros $x \geqslant N$, o número $P(x)$ é divisível por um número primo maior que 20.

Problema 15 *(IMO/SL - 2017)* Seja $p \geqslant 2$ um número primo. Eduardo e Fernando participam de um jogo praticando jogadas de forma alternada: em cada movimento, o jogador escolhe um índice i no conjunto $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ que não foi escolhido anteriormente por nenhum dos dois jogadores e escolhe um elemento a_i no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eduardo é o primeiro a jogar. O jogo termina quando todos os índices foram escolhidos. Então, após todas as escolhas, o número a seguir é calculado:

$$M = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_{p-1} 10^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i . 10^i$$

O objetivo de Eduardo eh fazer com que M seja divisível por p e o objetivo de Fernando é evitar isso. Prove que Eduardo tem uma estratégia vencedora.

Problema 16 *(China/TST - 2016)* Sejam $c, d \geqslant 2$ números naturais. Seja $\{a_n\}$ uma sequência satisfazendo

$$a_1 = c \qquad a_{n+1} = a_n^d + c \quad \forall n \geqslant 1$$

Prove que $\forall n \geqslant 2$ existe um número primo p tal que p divide a_n e não divide $a_1 \cdots a_{n-1}$.

Problema 17 *(IMO/SL - 2014)* Seja $c \geqslant 1$ um inteiro. Defina uma sequência de inteiros positivos tal que $a_1 = c$ e

$$a_{n+1} = a_n^3 - 4c \cdot a_n^2 + 5c^2 \cdot a_n + c \quad \forall n \geqslant 1$$

Prove que para cada inteiro $n \geqslant 2$ existe um número primo p tal que p divide a_n e não divide $a_1 \cdots a_{n-1}$.

Problema 18 *(IMO/SL - 2013)* Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que o maior divisor primo de $n^4 + n^2 + 1$ é igual ao maior divisor primo de $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

Problema 19 *(Rússia/2011)* Seja $P(a)$ o maior divisor primo de $a^2 + 1$. Prove que existem infinitos inteiros positivos a, b e c, dois a dois distintos, tais que $P(a) = P(b) = P(c)$.

Problema 20 *(IMO/2002)* Encontre todos os pares de inteiros positivos $m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$ para os quais existem infinitos inteiros positivos a tais que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

é inteiro.

5.1 OBM antigas

Problema 21 *(OBM/2013)* Encontrar o maior valor de n para o qual existe uma sequência $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de algarismos não nulos (ou seja, $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que, para cada k, $1 \leqslant k \leqslant n$, o número de k dígitos $\overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0} = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_0$ divide o número de $k+1$ algarismos $\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_0} = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_0$.

Problema 22 *(OBM/2015)* É verdade que existem um polinômio $f(x)$ de coeficientes racionais, nem todos inteiros, de grau $n > 0$, um polinômio $g(x)$, com todos os coeficientes inteiros, e um conjunto S com $n + 1$ inteiros tais que $g(t) = f(t)$ para todo $t \in S$?