Princípio KISS

Semana Olímpica/2019 - Nível 1

Prof. Armando Barbosa

25 de janeiro de 2019

---

1 Pensar simples (Principio KISS)

A ideia dessa seção é apresentar o príncipio KISS (Keep it simple, stupid) à questões de olimpíadas de matemática. Para entender melhor como isso acontece, vejamos uma questão que caiu recentemente na 3ª fase do nível 2 da OBM/2015:

Problema 1 *(OBM/2015 - 3ª fase - N2)* Prove que existe um número que pode ser representado de pelo menos 2015 maneiras diferentes como soma de quadrados de números naturais não nulos, não necessariamente todos distintos. Considera-se que duas somas que alteram apenas a ordem das parcelas constituem uma mesma representação.
Por exemplo, $1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2 + 10^2$ e $5^2 + 12^2$ são duas maneiras distintas de escrevermos 169 como soma de quadrados.

Antes de começar a solução, analisemos o seguinte fato importante: $2^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Daí, temos que 2^2 pode ser representado de duas formas diferentes: 2^2 e $1^2+1^2+1^2+1^2$. Podemos generalizar essa ideia:

Solução: Tome o número $2014 \cdot 4 = 8056$. Apresentemos as 2015 formas de representá-lo como soma de quadrados distintos, transformando cada 2^2 em $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$:

$$
\begin{aligned}
2014 \cdot 2^2 &= 2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 \\
&= \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right) + 2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 \\
&= \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right) + \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right) + 2^2 + \cdots + 2^2 \\
&\vdots \\
&= \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right) + \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right) + \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right) + \\
&\quad \cdots + \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right)
\end{aligned}
$$

Notemos que acima temos representações com 2014, 2013, $\cdots$, 1 e 0 termos 2^2, totalizando, assim, 2015 representações. ■

Uma outra solução bem simples para a questão anterior seria analisar $2014 \cdot 5^2$ e trocar cada 5^2 por $3^2 + 4^2$ de forma análoga ao feito com cada 2^2 na solução anterior. De toda forma, notemos que a ideia principal de duas soluções simples nessa questão é encontrar um número pequeno que pode ser escrito como soma distintas de quadrados perfeitos.

Outra solução seria aproveitar que 1^2 é quadrado prefeito e escrever 2016^2 como x^2 e completar o restante com 1^2's:

$$\begin{aligned}
2016^2 &= 2015^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\
2016^2 &= 2014^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\
&\vdots \\
&= 2^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\
&= 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2
\end{aligned}$$

Como veremos em todo esse material , o principio de manter a simplicidade está presente em várias questões. Nessa seção, veremos aplicações das seguintes ideias:

- Dividindo em casos simples;
- Olhando consecutivos;
  - Olhando ímpares consecutivos;
- Olhando produtos notáveis;
- Olhando todos;
- Conclusão e outros exercícios.

Para dar continuidade a essa seção, vejamos uma outra ideia: dividir em casos simples.

1.1 Dividindo em casos simples

Uma outra forma de pensar simples é dividir em casos. Não em casos aleatórios, mas em casos simples, que tenham a ver com o enunciado. Vejamos a aplicação dessa ideia no exercício a seguir:

Problema 2 *(Cone Sul/2015)* Mostre que, para todo inteiro n, o número $n^3-9n+27$ não é divisível por 81.

Antes de pensar na solução, analisemos o 81. O único fator primo de 81 é o número 3. Então, pode fazer sentido olhar os casos a partir da divisibilidade por 3. Analisemos, então, os casos a partir da divisibilidade por 3:

Solução: Tomemos $n \pmod 3$:

- Caso $n \equiv 0 \pmod 3$:

$$\begin{aligned}
n^3 - 9n + 27 &= n \cdot \left(n^2 - 9\right) + 27 \\
&= n \cdot (n-3) \cdot (n+3) + 27
\end{aligned}$$

Se n é múltiplo de 3, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 3k$. Aplicando isso no resultado encontrado anteriormente temos que:

$$\begin{aligned}
n^3 - 9n + 27 &= 3k \cdot (3k-3) \cdot (3k+3) + 27 \\
&= 27\,(k-1) \cdot k \cdot (k+1) + 27
\end{aligned}$$

Daí, como $(k-1)\cdot k\cdot(k+1)$ é o produto de três números consecutivos, logo um deles será múltiplo de 3. Com isso, temos que $27\,(k-1)\cdot k\cdot(k+1)$ é múltiplo de 81. Portanto, pela última equação encontrada, podemos concluir que: $n^3-9n+27$, nesse caso, será um múltiplo de 81 mais 27 e, consequentemente, não será múltiplo de 81, pois 27 não é.

- Caso $n \not\equiv 0 \pmod 3$:

Nesse caso, teremos que $n^3 \not\equiv 0 \pmod 3$ e como $(-9n+27)$ é múltiplo de 3, então $n^3-9n+27$ não será múltiplo de 3 e tampouco será múltiplo de 81. ■

Percebamos que na questão anterior apenas dividir em casos $\pmod 3$ foi suficiente. Notemos também que isso fazia sentido pelo enunciado.

A próxima ideia que veremos, nesse capítulo, é olhar números consecutivos ou termos consecutivos de uma sequência. Estudemos algumas aplicações disso na próxima subseção.

1.2 Olhando consecutivos

Em outras questoes de olimpíada, é bastante comum apenas a análise de números consecutivos para resolver o problema. Vejamos uma aplicação clássica dessa ideia:

Problema 3 *(Ibero/2017)* Para cada inteiro n, seja $S(n)$ a soma de seus algarismos. Dizemos que n tem a propriedade P se os termos da sequência infinita $n, S(n), S\left(S(n)\right), S\left(S\left(S(n)\right)\right), \cdots$ são todos pares, e dizemos que n tem a propriedade I se os termos desta sequência são todos ímpares. Mostre que, entre todos os inteiros positivos n tais que $1 \leqslant n \leqslant 2017$, são mais os que têm a propriedade I do que os que têm a propriedade P.

Analisemos, nessa questão, os casos iniciais. Sabemos que os números $1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ tem as propriedades I e P conforme sua paridade. Daí, os próximos números a terem as propriedades do enunciado são: 20 tem a propriedade P, 21 tem a propriedade I, 22 tem a propriedade P, 23 tem a propriedade I e assim sucessivamente até 26 tem a propriedade P e 27 tem a propriedade I. Daí, pela análise dos casos iniciais, podemos conjecturar ("chutar") a seguinte ideia: se x tem a propriedade P, então $(x+1)$ tem a propriedade I. Comecemos então a solução provando tal conjectura:

Solução: Comecemos provando o lema a seguir:

Lema: Se x tem a propriedade P, então $(x+1)$ tem a propriedade I

Prova: Note que se x tem a propriedade P, então temos que x e $S(x)$ é par e, consequentemente, ambos têm 0, 2, 4, 6 ou 8 como algarismo da unidade. Daí, $(x+1)$ é impar e $S(x+1)$ é impar e, analogamente, ambos têm 1, 3, 5, 7 ou 9 como algarismo da unidade.

De forma análoga, $S\left(S(x)\right)$ é par e, com isso, tem 0, 2, 4, 6 ou 8 como algarismo da unidade e, pelo mesmo raciocínio, $S\left(S(x+1)\right)$ é impar e tem 1, 3, 5, 7 ou 9 como algarismo da unidade.

Então, podemos seguir usando a ideia apresentada em relação à quantidade de S's para provar o lema.

Com o lema provado, a questão fica mais simples ainda: o número 1 tem a propriedade I e, além disso, para cada número x com propriedade P há o número $(x+1)$ com a propridade I resultando, então, em exatamente um mais a quantidade de números com propriedade I em relação à quantidadede de números com propriedade P. ■

A questão acima pode ser resolvida de outra forma: na força bruta, contando, na marra, todos os números. E então um bom aluno poder-se-ia perguntar: Qual é a melhor ideia? A resposta é que a melhor ideia é a que resolve. Quando se trata da primeira questão de uma prova, a prática e a experiência mostram que, em grande parte dos casos, há alguma solução simples. No entanto, se diante da, em tese, questão mais fácil da prova, com outras questões para pensar, sabendo que a solução simples e a na marra valem o mesmo tanto, quanto tempo demorar procurando uma solução mais simples, após ter a ideia da solução bruta?

A recomendação do autor é pensar uns dez minutos e, caso nenhuma ideia venha, escrever adequadamente a solução na marra. Mas, por exemplo, se a ideia vem nos últimos trinta minutos de prova, então não há tempo para buscar a melhor ideia.

Ás vezes, a questão pode não envolver exatamente observar dois números consecutivos, mas olhar primos consecutivos, ímpares consecutivos, múltiplos consecutivos de 3, 4, $\cdots$ ou até mesmo olhar que entre K números consecutivos, há um múltiplo de K. Para entender melhor essa ideia, vejamos o exercício a seguir.

1.2.1 Olhando ímpares conseutivos

Problema 4 *(USAMO/2017)* Prove que existem infinitos pares (a, b) de inteiros maiores que 1, distintos e primos entre si tais que $a^b + b^a$ é divisível por $a + b$.

Observe que a questão pede apenas para provar que há infinitos pares. Ou seja, não precisa encontrar todos os pares. Analisando os casos iniciais, vemos que $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$ e $(2, 7)$ não são pares que satisfazem o enunciado. O par $(3, 4)$ também não satisfaz, mas o par $(3, 5)$ dá certo. Com um pouco de algebrismo, podemos ver, também, que $(5, 7)$ também dá certo. De repente, olhar ímpares consecutivos pode ser uma boa ideia.

Solução: Tomemos $a = 2n + 1$ e $b = 2n - 1$. Vejamos como isso resolve o problema: para $n > 1$, são números inteiros positivos, distintos e primos entre si. Falta analisar se, nesse caso, $a^b + b^a$ é divisível por $a + b$.

Lembrando que $a + b = (2n + 1) + (2n - 1) = 4n$, façamos as contas:

$$\begin{aligned}
a^b + b^a &\equiv (2n+1)^{2n-1} + (2n-1)^{2n+1} \pmod{4n} \\
&\equiv (2n+1)^{2n-2} \cdot (2n+1) + (2n-1)^{2n} \cdot (2n-1) \pmod{4n} \\
&\equiv \left(\left(4n^2 + 4n + 1\right)^2\right)^{n-1} \cdot (2n+1) \\
&\quad + \left(\left(4n^2 - 4n + 1\right)^2\right)^{n} \cdot (2n-1) \pmod{4n} \\
&\equiv 1^{2^{n-1}} \cdot (2n+1) + 1^{2^n} \cdot (2n-1) \pmod{4n} \\
&\equiv (2n+1) + (2n-1) \equiv 0 \pmod{4n}
\end{aligned}$$

■

Outra forma de se chegar a ímpares consecutivos, seria a seguinte análise: Supondo, sem perda de generalidade, que $a > b$, queremos $a + b$ dividindo $a^b + b^a$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
a + b &\mid a^b + b^a \\
a + b &\mid a^b + b^b - b^b + b^a \\
a + b &\mid a^b + b^b + b^b \cdot \left(b^{a-b} - 1\right)
\end{aligned}$$

Se b impar (conjectura), então teremos que:

$$a + b \mid a^b + b^b$$

Daí, essa hipótese de b impar fica bom, pois subtraindo os dois últimos resultados encontrados, poderemos concluir que:

$$a + b \mid b^b \cdot \left(b^{a-b} - 1\right)$$

Como a e b são primos entre si, $a + b$ não tem fator primo com b^b. Daí, temos que:

$$a + b \mid b^{a-b} - 1$$

Na equação acima, note que $a = b + 2$ fica ótimo, pois, por esta substituição, poderemos concluir que:

$$2b + 2 \mid b^2 - 1 \Rightarrow 2 \cdot (b + 1) \mid (b - 1) \cdot (b + 1) \Rightarrow 2 \mid b - 1$$

Fato que é verdadeiro, pois b é ímpar. ■

Continuando a teoria, vejamos mais uma aplicação de ideia simples: olhar produtos notáveis.

1.3 Olhando produtos notáveis

Há casos em que a ideia simples está em algum produto notável conhecido. Geralmente, esse produto notável é um quadrado perfeito. Para entender melhor, vejamos a questão a seguir:

Problema 5 *(OBM/2012 -3ª fase - N3)* Determine se existem inteiros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_{2012}$, todos maiores ou iguais a 2, tais que:

$$n^2 = a_1^2 + a_2^3 + a_3^5 + \cdots + a_i^{p_i} + \cdots + a_{2012}^{p_{2012}}$$

em que p_i é o i-ésimo primo (ou seja, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\cdots$).

Primeiramente, notemos que a questão não pede todos os inteiros que dão certo: pergunta apenas se existe. Apresentar um exemplo que dá certo resolve a questão. Além disso, observemos os termos n^2 e a_1^2. Esses termos sugerem um produto notável envolvendo quadrado perfeito. Falta apenas $2a_1 + 1$ para isso. Podemos então forçar um impar e escolher um a_1 conveniente.

Solução: Façamos $a_2 = a_3 = \cdots = a_{2012} = 3$. Nesse caso, teremos que:

$$S = 3^3 + 3^5 + \cdots + 3^{p_{2012}}$$

é impar. Tomemos k tal que $S = 2k + 1$. Fazendo $a_1 = k$, teremos que $n^2 = (k + 1)^2$, obtendo, assim, inteiros positivos que satisfazem o enunciado. ■

Para encerrar a teoria, falta só a próxima seção: olhando todos

1.4 Olhando todos

Em alguns casos, a ideia para solucionar uma questão está em analisar todos os elementos, ou pelo menos todos os anteriores, de forma a buscar alguma propridade interessante. Vejamos um exemplo resolvido disso:

Problema 6 *(Simulado N2 - SO/2017)* Prove que não é possível separar 6 inteiros positivos consecutivos em dois conjuntos de modo que o produto dos elementos de um conjunto seja igual ao produto dos elementos do outro conjunto.

Solução: Suponhamos que seja possível.

Primeiramente, note que não há dois múltiplos de 7 entre os 6 consecutivos, de forma que se houvesse um múltplo de 7 entre os 6, então um dos produtos seria múltiplo de 7 (o que tivesse o múltiplo de 7) e o outro não seria (pois não teria múltiplo de 7). Portanto, não pode haver múltiplo de 7 entre esses 6 inteiros.

Dessa forma, só nos resta analisar o caso em que os 6 elementos são da forma: $7K + 1$, $7K + 2$, $\cdots$, $7K + 6$. Supondo que seja possível a condição do enunciado, seja T o produto dos elementos de um conjunto. Daí, analisando o produto dos seis elementos $\pmod 7$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} T \cdot T &\equiv (7K+1)\cdot(7K+2)\cdots(7K+6) \pmod 7 \\ T^2 &\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \equiv 720 \equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

No entanto, todo inteiro y elevado ao quadrado deixa os seguintes restos na divisão por 7:

$$\begin{aligned} y &\equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod 7 \\ y^2 &\equiv 0, 1, 4, 9 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

Como não existe inteiro que elevado ao quadrado deixa 6 na divisão por 7, chegamos então num absurdo. ■

1.5 Conclusão e outros exercícios

Pelos exercícios resolvidos, podemos ver que a ideia de tentar aplicar o princípio de manter a simplicidade do problema é uma ideia bem atual, pois vemos soluções de problemas bem recentes, sendo dois desse ano (2017) e dois do ano antepassado. Para praticar um pouco, tente resolver os exercícios a seguir:

1.6 Conclusão e outros exercícios

Pelos exercícios resolvidos, podemos ver que a ideia de tentar aplicar o princípio de manter a simplicidade do problema é uma ideia bem atual, pois vemos soluções de problemas bem recentes, sendo dois desse ano (2017) e dois do ano antepassado. Para praticar um pouco, tente resolver os exercícios a seguir:

Problema 7 Prove que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

tem infinitas soluções inteiras.

Problema 8 Artur escreve na lousa o produto

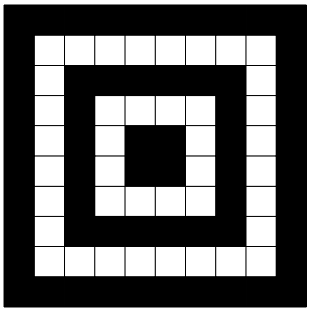
$$1! \cdot 2! \cdots (2016)!$$

Que número Artur deve escolher para tirar ele e o seu fatorial para que o produto dos números restantes na lousa seja um quadrado perfeito?

Dica: Considere a fatoração: $(a+1)! \cdot a! = (a+1)\cdot(a!)^2$.

Problema 9 *(Rússia/2015)* Dizemos que um inteiro positivo n é *quase um quadrado perfeito* quando ele é igual ao produto de dois inteiros positivos consecutivos. Prove que todo número quase quadrado perfeito pode ser expresso como um quociente de dois números quase quadrados perfeitos.

Problema 10 *(OMCPLP/2012)* Maria dispões de um tabuleiro $n \times n$, inicialmente com todas as casas pintadas da cor branca. Naria decide pintar algumas casas do tabuleiro de preto, formando um mosaico, como mostra a figura abaixo, da seguinte maneira: ela pinta todas as casas do bordo do tabuleiro de perto, e em seguida deixa pintadas de branco as casas do bordo do tabuleiro que ainda não foi pintado. Então, pinta novamente de preto as casas do bordo do próximo tabuleiro restante e assim sucessivamente.



a) Determine um valor de n para que o número de casas pretas seja igual a 200.

b) Determine o menor valor de n para que o número de casas pretas seja maior que 2012.

Problema 11 *(OCM/2015 - N2/N3)* Um inteiro positivo n diz-se *invocado* se existem n inteiros positivos $a_1, \cdots, a_n$, dois a dois distintos, tais que:

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$$

O inteiro positivo 3, por exemplo, é invocado, visto que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

Mostre que todo inteiro $n > 2$ é invocado.

Problema 12 *(Cone Sul/2009)* Ana e Beto jogam em um tabuleiro de 11 linhas e 9 colunas. Primeiro, Ana divide o tabuleiro em 33 zonas. Cada zona é formada por 3 casas adjacentes de forma 1×3 ou 3×1. Depois, Beto escreve em cada casinha 1×1 um dos números $0, 1, 2, 3, 4, 5$ de modo que a soma dos números de cada zona seja igual a 5. Beto ganha se a soma dos números escritos em cada uma das 9 colunas do tabuleiro é um número primo; caso contrário, Ana ganha. Demonstre que Beto tem uma estratégia vencedora.

Problema 13 *(JBMO/2004)* Se x e y são inteiros positivos tais que $3x + 4y$ e $4x + 3y$ são ambos quadrados perfeitos, prove que x e y são divisíveis por 7.

Problema 14 *(Cone Sul/TST - 2016)* Encontre o menor inteiro positivo que possui exatamente 2015 divisores positivos.

Problema 15 *(OMCPLP/2014)* Determine todas as quádruplas de inteiros positivos (k, a, b, c) tais que $2^k = a! + b! + c!$, com $a \geqslant b \geqslant c$.

Problema 16 *(Hungria/1997)* Cada membro de um comitê classifica os estudantes A, B e C em alguma ordem. Sabe-se que a maioria do comitê classifica o estudante A melhor do que o estudante B e que a maioria do comitê classifica o estudante B melhor que o estudante C. Pode-se afirmar que a maioria do comitê classifica o estudante A melhor que o estudante C?

Problema 17 *(França/TST - 2004)* Seja n um inteiro positivo e seja $A = \{n, n+1, \cdots, n+17\}$. Existe um ou mais valores de n para os quais podemos dividir A em dois subconjuntos disjuntos B e C tais que $A = B \cup C$ e o produto de todos os elementos de B é igual ao produto de todos os elementos de C?

Problema 18 *(Cone Sul/TST - 2017)* Os números racionais a e b satisfazem a equação

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$$

Prove que $(1 - ab)$ é o quadrado de um número racional.

Problema 19 *(Cone Sul/Lista - 2017)* Seja $\mathbb{M}$ o conjunto formado pelos 2017 números da forma:

$$11, 101, 1001, 10001, \cdots, 1\underbrace{0 \cdots 0}_{\text{2016 zeros}}1$$

Mostre que pelo menos 99% dos elementos de $\mathbb{M}$ não são primos.

Problema 20 *(Nórdica/2017)* Seja n um inteiro positivo. Mostre que existem inteiros positivos a e b tais que:

$$\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1$$

- Questões de 3ª fase da OBM

Problema 21 *(OBM/2007 - 3ª fase - N2)* Prove que não existem soluções inteiras positivas para a equação $3^m + 3^n + 1 = t^2$.

Problema 22 *(OBM/2009 - 3ª fase - N2)* Prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $x^3 + y^3 = 2^{2009}$.

Problema 23 *(OBM/2008 - 3ª fase - N2)* Mostre que se p, q são inteiros positivos primos tais que $r = \dfrac{p^2 + q^2}{p + q}$ é inteiro, então r é primo.

Problema 24 *(OBM/2011 - 3ª fase - N2)* Esmeralda escreveu uma lista de números inteiros positivos em uma folha de papel. Renan percebeu que todos os números da lista e todas as somas de qualquer quantidade de números distintos da lista não eram divisíveis por nenhum quadrado perfeito diferente de 1. Qual a quantidade máxima de números na lista de Esmeralda?

Problema 25 *(OBM/2012 - 3ª fase - N2)* Muitas pessoas conhece a famosa sequência de Fibonacci, mas o que muita gente não sabe é que na mesma época um matemático brasileiro criou as sequências de Somanacci. Essas sequências são geradas a partir de três termos iniciais inteiros positivos menores que 2012. Diferente do que acontece na sequência de Fibonacci, cada termo de uma sequência de Somanacci é a soma de todos os termos anteriores. Quantas sequências de Somanacci distintas possuem o número 2012 em alguma posição?

Problema 26 *(OBM/2013 - 3ª fase - N2)* Dado um número de dois dígitos chamamos de seu *quadroido* o número formado juntando os quadrados de seus dígitos na mesma ordem do número. Por exemplo, os quadroidos de 19, 72, 65 e 23 são 181, 494, 3625 e 49, respectivamente. Ache todos os números de dois dígitos que dividem seu quadroido.

Problema 27 *(OBM/2011 - 3ª fase - N3)* Dizemos que um número inteiro positivo é *chapa* quando ele é formado apenas por algarismos não nulos e a soma dos quadrados de todos os seus algarismos é também um quadrado perfeito. Por exemplo, 221 é chapa, pois $2^2 + 2^2 + 1^2 = 3^2$ e todos os seus algarismos são não nulos, 403 não é chapa, pois, apesar de $4^2 + 0^2 + 3^2 = 5^2$, um dos algarismos de 403 é nulo e 12 não é chapa, pois $1^2 + 2^2 = 5$ não é quadrado perfeito.
Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um número chapa com exatamente n algarismos.

- Desafio

Problema 28 *(IMO/2017)* Para cada inteiro $a_0 > 1$, defina a sequência $a_0, a_1, \cdots$ para $n \geqslant 0$ tal que:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro,} \\ a_n + 3 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine todos os valores de a_0 tal que existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.