Semelhanças, Congruências, Razões e alguns tópicos adicionais

XXII Semana Olímpica, Anápolis – GO

Nível 1

George Lucas

Aqui abordaremos alguns assunto e ideias relacionados a razões e semelhanças/congruência de triângulos. Vamos lá!

1- Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos, digamos ABC e DEF, são semelhantes se satisfazem as seguintes condições: ∠BAC=∠EDF, ∠ABC=∠DEF e ∠BCA=∠EFD. Denotamos por $\Delta \mathrm{ABC} \sim \Delta \mathrm{DEF}$.
Veja que apenas duas dessas 3 igualdades de ângulos já garantem a terceira, uma vez que ∠BAC+∠ABC+∠BCA=∠EDF+∠DEF+∠EFD=180°.

Vejamos agora algumas propriedades dos triângulos semelhantes:

Propriedade 1: Se $\Delta \mathrm{ABC} \sim \Delta \mathrm{DEF}$, então $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$. Os pares de lados (AB, DE), (BC, EF), (CA, FD) são chamados de homólogos, e essa razão é chamada de *razão de semelhança* que leva o triângulo DEF no triângulo ABC. Veja que essa razão de semelhança é a inversa da razão de semelhança que leva o triângulo ABC no triângulo DEF.

Propriedade 2: Se os triângulos ABC e DEF satisfazem as condições ∠BAC=∠EDF e ${}^{AB}\!/_{DE} = {}^{AC}\!/_{DF}$, então ABC e DEF serão semelhantes.

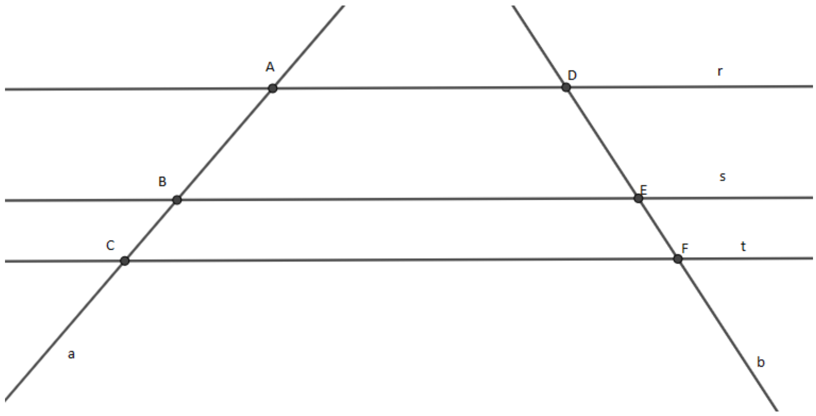
Propriedade 3: Se $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, então ABC e DEF são semelhantes

Propriedade 4: Seja λ a razão de semelhança que leva DEF em ABC.
Então $\frac{[ABC]}{[DEF]} = \lambda^2$, onde [ABC] e [DEF] denotam as áreas dos triângulos ABC e DEF, respectivamente.

Definição: Dizemos que dois triângulos semelhantes são congruentes se λ=1.
Denotamos por $\Delta \mathrm{ABC} \equiv \Delta \mathrm{DEF}$.

2- Teorema de Tales

Considere um feixe de 3 retas paralelas $r \,//\, s \,//\, t$ (denotemos por $u \,//\, v$ quando as retas u e v forem paralelas) e duas retas transversais a e b. Conforme a figura abaixo:



Então são válidas as seguintes relações:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

A volta do teorema de Tales também é válida, isto é, sejam A, B e C pontos, nessa ordem, sobre uma reta a e D, E e F pontos, nessa ordem, sobre uma reta b. Se $AD\ //\ CF$ e uma das três relações acima se verifica, então $BE\ //\ AD\ //\ CF$.

3- Relacionando segmentos e áreas

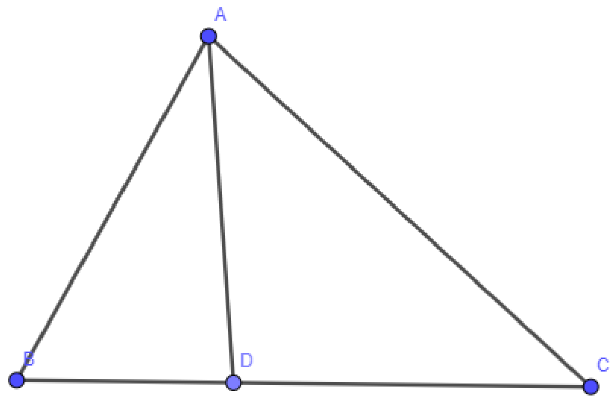
Definição: Definimos uma ceviana de um triângulo como um segmento cujo um dos extremos é um dos vértices do triângulo e o outro extremo está contido no lado oposto a esse vértice.

Considere um triângulo ABC e seja D um ponto sobre o lado BC, isto é, AD é um ceviana com D no interior do segmento.
Seja h o comprimento da altura relativa ao lado BC, isto é, a distância de A ao lado BC. Assim, temos que as áreas dos triângulos ABD e ACD podem ser calculadas como segue:

$$[ABD] = \frac{BD \cdot h}{2}\ ;\ \ [ACD] = \frac{CD \cdot h}{2}$$

Note que h também é altura nos triângulos ABD e ACD.
Assim, $\frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{BD \cdot h/2}{CD \cdot h/2} = \frac{BD}{CD}$.
Daí, chegamos a seguinte conclusão:

$$\frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{BD}{CD}$$



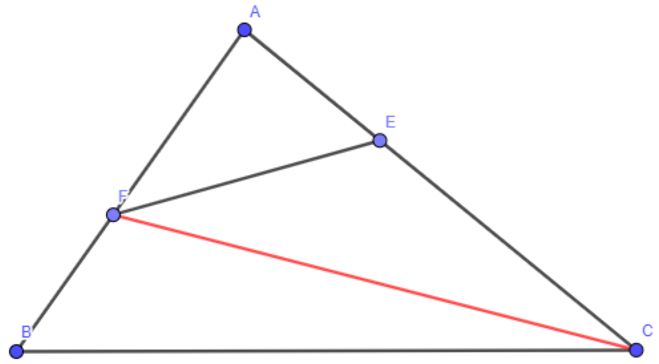
Pode-se também chegar a outra relação, caso seja mais conveniente, como segue:

$$\frac{[ACD]}{[ABD]} = \frac{CD}{BD} \to \frac{[ACD]}{[ABD]} + 1 = \frac{CD}{BD} + 1 \to \frac{[ACD] + [ABD]}{[ABD]} = \frac{CD + BD}{BD} \to$$

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{BC}{BD} \to \frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{BD}{BC}$$

Chegando-se a conclusão que $\frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{BD}{BC}$.

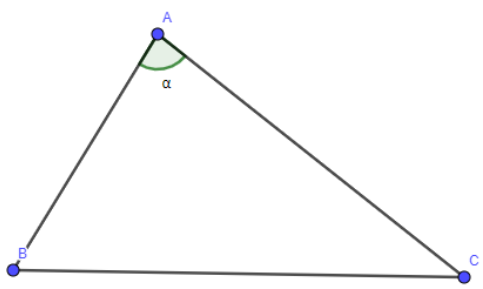
Considere um triângulo ABC e ponto E e F sobre AC e AB, respectivamente.

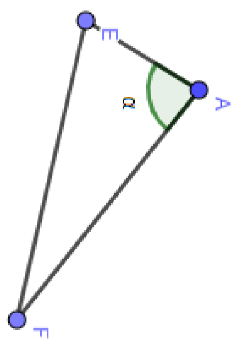


Assim, $\frac{[CAF]}{[ABC]} = \frac{AF}{AB}$ e $\frac{[AEF]}{[CAF]} = \frac{AE}{AC}$. Multiplicando essas duas equações, obtemos:

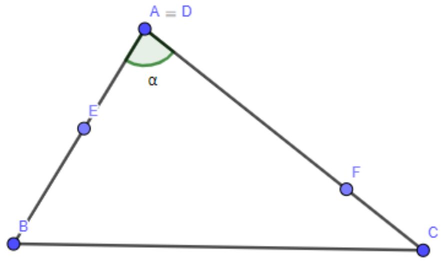
$$\frac{[AEF]}{[ABC]} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC}$$

Agora, considere dois triângulos ABC e DEF de modo que ∠BAC=∠EDF=α.





Agora, “una-os” a fim de que o vértice D coincida com o A e os pares de retas (AB;DE) e (AC;DF) coincidam, como na figura abaixo:



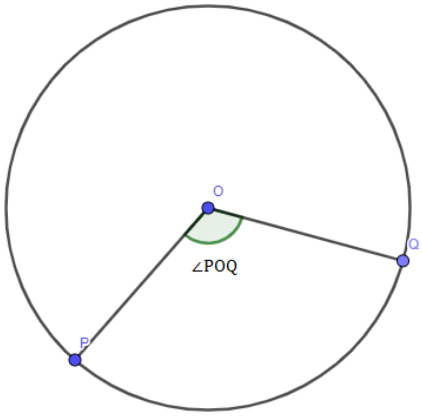
Assim, $\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{DE \cdot DF}{AB \cdot AC} \rightarrow \frac{[DEF]}{DE \cdot DF} = \frac{[ABC]}{AB \cdot AC}$, ou seja, dado um triângulo ABC, então o valor de $\frac{[ABC]}{AB \cdot AC}$ depende apenas do ângulo ∠BAC, aqui chamado de α, ou seja, o valor de $\frac{2\,[ABC]}{AB \cdot AC}$ depende apenas de α. Chamaremos esta razão de *sen(α)* (lê-se seno de α). Assim, $\frac{2[ABC]}{AB \cdot AC} = sen(\alpha) \rightarrow [ABC] = {AB \cdot AC \cdot sen(\alpha)}/{2}$.

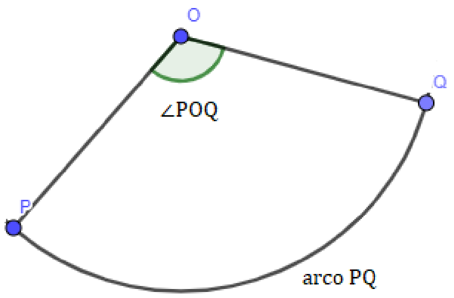
Essa fórmula para cálculo de áreas de triângulos é bastante conhecida na trigonometria, entretanto não aprofundaremos muito nesse assunto. Segue abaixo os senos de alguns ângulos notáveis:

$$sen(0°) = 0\,;\, sen(30°) = \frac{1}{2}\,;\, sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\, sen(90°) = 1\,;$$
$$sen(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\, sen(135°) = \frac{\sqrt{2}}{2};\, sen(150°) = \frac{1}{2}\,;\, sen(180°) = 0$$

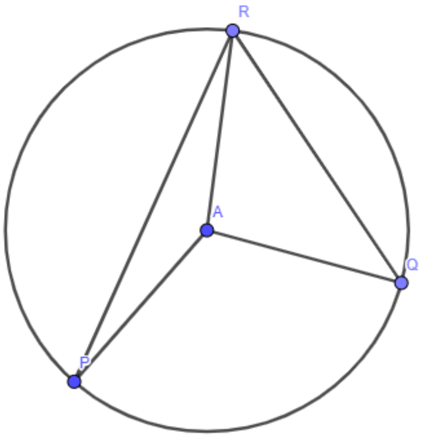
4- Ângulos na circunferência

Definição: Uma circunferência é o conjunto de pontos do plano que possui a mesma distância a um ponto fixo, esse ponto fixo é chamado *centro* da circunferência e a distância é chamada *raio.* Além disso, chamamos um segmento que conecta dois vértices de uma circunferência de *corda*, e se essa corda passa pelo centro da circunferência, ela é chamada de *diâmetro* (note o centro da circunferência é ponto médio do diâmetro e o diâmetro mede o dobro do raio).
-Ângulo central: Seja O o centro de uma circunferência e P e Q ponto sobre essa circunferência. Definimos como ângulo central o ângulo ∠POQ. Diremos também que esta é a medida do arco PQ (denotemos por *arc(PQ)*) da circunferência.





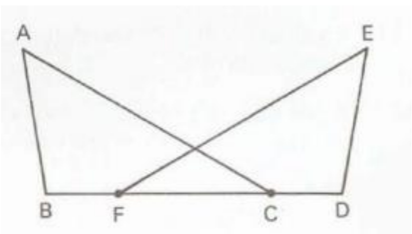
-Ângulo inscrito: Sejam P,Q e R pontos sobre uma circunferência, então $\angle \mathrm{PRQ} = \frac{arc(PQ)}{2}$, onde esse arco PQ é o arco que não contém o ponto R.
Para provar isso, considere A o centro da circunferência



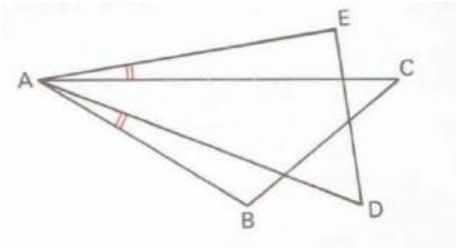
Como AR=AP → ∠ARP=∠APR. De maneira similar, ∠ARQ=∠AQR.
Além disso, temos que ∠ARQ+∠AQR+∠QAR=180° e ∠ARP+∠APR+∠PAR=180°.
Somando essas equações, obtemos:
∠ARQ+∠AQR+∠QAR+∠ARP+∠APR+∠PAR=360°.
Como ∠QAR+∠PAR = 360°-∠PAQ, então 2∠ARP + 2∠ARQ +360°-∠PAQ=360°, chegando a conclusão que $\angle \mathrm{ARP} + \angle \mathrm{ARQ} = \frac{\angle \mathrm{PAQ}}{2} = \frac{arc(PQ)}{2}$, como queríamos.
Corolário: Sejam P e Q pontos de uma circunferência e R e S pontos sobre o mesmo arco PQ dessa circunferência. Assim, ∠PRQ=∠PSQ pois ambos medem $\frac{arc(PQ)}{2}$.
Observação: Aqui tratamos o caso em que o ponto A está no interior do triângulo PQR. Deixamos o outro caso a cargo do leitor.

Agora vamos aos exercícios!

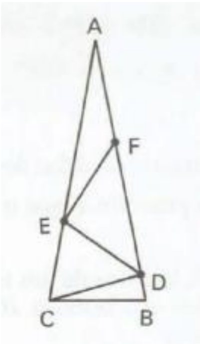
1. Na figura abaixo, sendo $BF = CD$, ∠ABC=∠FDE, ∠BAC=∠DEF. Prove que $AC = EF$.



2. Na figura abaixo, sendo $AB = AE$, ∠BAD=∠CAE, ∠ABC=AED=90°, prove que $BC = DE$.

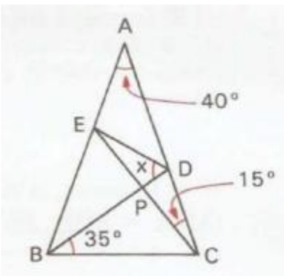


3. Determine a medida do ângulo do vértice A do triângulo isósceles ABC, sabendo que os segmentos BC, CD, DE, EF e FA são congruentes.

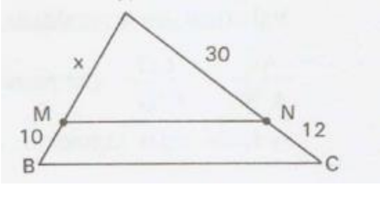


4. Dizemos que uma ceviana de um triângulo é uma bissetriz interna, se ela divide um dos internos do triângulo ao meio. Mostre que a bissetriz (interna) de um ângulo é perpendicular ao lado oposto (isto é, forma 90° com o mesmo) se, e só se, o triângulo é isósceles cuja base é ao lado oposto a esse ângulo.

5. O triângulo ABC abaixo é isósceles de base BC. Determine x.



6. Na figura, MN é paralela a base BC do triângulo ABC. Calcule o valor de x.

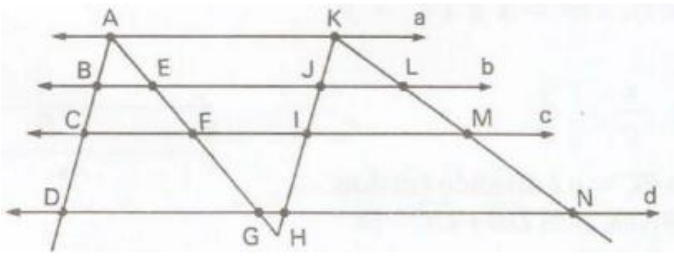


7. Na figura abaixo, onde a // b // c // d // e , temos que:

$$AD + AG + HK + KN = 180cm ;$$

$$\frac{AE}{AB}=\frac{3}{2},\frac{JK}{AB}=\frac{9}{5},\frac{KL}{AB}=\frac{27}{10};$$
$$AB, BC\ e\ CD\ são\ proporcionais\ a\ 2, 3\ e\ 4, respectivamente.$$

Calcule as medidas dos segmentos $EF, LM\ e\ CD$.

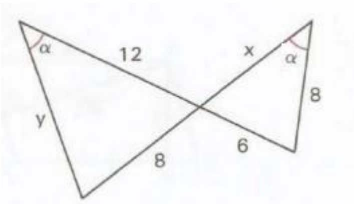


8. Seja XYZ um triângulo com ∠XYZ=α. Considere o ponto W tal que Y é ponto médio de XW.
   a) Prove que os triângulos XYZ e YZW têm a mesma área.
   b) Prove que sen(α) = sen(180°- α).

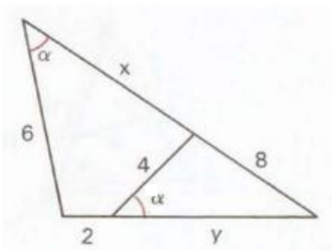
9. Teorema da bissetriz interna: Seja AD uma bissetriz interna do triângulo ABC, com D no lado BC. Prove que $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$.

10. Calcule os valores de x e y nas figuras abaixo:

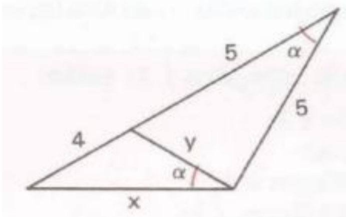
a)



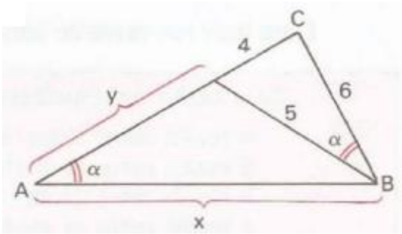
b)



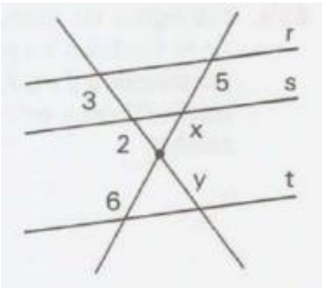
c)



d)



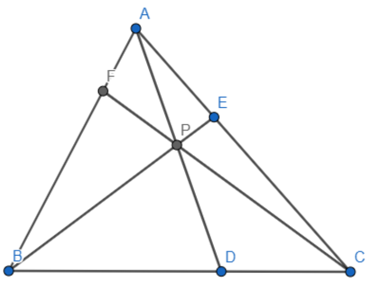
11. Sabendo que as retas r, s e t são paralelas 2 a 2, determine x e y.



12. Seja ABC um triângulo e R, S e T os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Prove que os triângulos ABC e RST são semelhantes e ache a razão de semelhança que leva ABC em RST.

13. Seja ABC um triângulo equilátero de área 1. Considere os pontos D, E e F sobre BC, CA e AB, respectivamente, tal que $CD = 2 \cdot BD, AE = 2 \cdot CE\ e\ BF = 2 \cdot AF$. Calcule a área do triângulo DEF.

14. Sejam $AD, BE\ e\ CF$ cevianas concorrentes em um triângulo (de acordo com a figura abaixo), onde P é o ponto de intersecção delas.



Determine $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF}$.

15. A mediana é uma ceviana que parte de um vértice e divide o lado oposto em dois segmentos de mesmo comprimento.
    a) Sejam U e V os pontos médios de AB e AC de um triângulo ABC, respectivamente. Prove que UV é paralelo a BC. UV é chamado de *base média* relativa ao lado BC.
    b) Mostre que A, o ponto médio de UV e o ponto médio de BC são colineares, isto é, estão sobre uma mesma reta.
    c) Seja G a intersecção de BV e CU. Prove que G, o ponto médio de UV e o ponto médio de BC são colineares.

d) Conclua que as três medianas de um triângulo concorrem, isto é, se cortam em um único ponto. Tal ponto é chamado *baricentro* do triângulo.
e) Mostre que uma mediana divide o triângulo em dois triângulos menores de mesma área.
f) Mostre que as 3 medianas de um triângulo dividem o triângulo em seis triângulos menores e de mesma área. Em particular, a área do triângulo ABG é $\frac{1}{3}$ da área do triângulo ABC.
g) Seja G o baricentro do triângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. Prove que $\frac{AG}{GM} = 2$.

16. Dizemos que uma ceviana é bissetriz de um triângulo se ela divide um dos ângulos internos do triângulo (nesse caso chamada de bissetriz interna) ou um dos ângulos externos do triângulo (nesse caso chamada de bissetriz externa).
    a) Prove um ponto P, no mesmo plano do triângulo ABC, tem a mesma distância dos lados AB e AC se, e somente se, ele está em uma das duas bissetrizes que passam pelo vértice A. Aqui definimos distância de um ponto a uma reta como a menor distância entre esse ponto e algum ponto da reta, nesse caso seria o comprimento do segmento que parte desse vértice e cujo outro extremo é o pé da perpendicular desse vértice a essa reta.
    b) Mostre que as três bissetrizes internas de um triângulo concorrem, isto é, elas têm um ponto em comum. Tal ponto é chamado de *incentro* de triângulo.
    c) Mostre que duas das bissetrizes externas e a bissetriz externa do terceiro vértice concorrem. Tal ponto é chamado de *exincentro* do triângulo. Cada triângulo admite 3 exincentros.
    d) Mostre que existe um único ponto no interior do triângulo cuja distância aos três lados é a mesma. Tal distância é chamada *inraio* do triângulo.
    e) Seja r o inraio do triângulo ABC. Prove que a área desse triângulo é calculada por

    $(AB + BC + CA)r/_{2}$.

17. Seja I o incentro de um triângulo ABC e J o exincentro relativo ao vértice A, isto é, a bissetriz interna de A passa por J. E seja M a intersecção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC, isto é, a circunferência que passa pelos vértices A, B e C, com $M \neq A$.

    a) Prove que $MA = MB$.

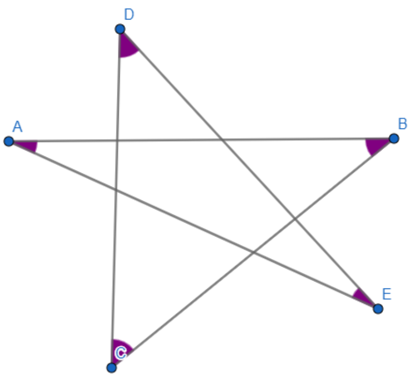
    b) Prove que $MA = MI$.

    c) Prove que a bissetriz interna e externa de um ângulo formam 90° entre si.

    d) Prove que $MA = MJ$.

    e) Conclua que $A, B, I \; e \; J$ estão sobre uma mesma circunferência cujo diâmetro é IJ.

18. Ache a soma dos 5 ângulos marcados da figura abaixo



.

19. Em um triângulo ABC, seja M o ponto médio do lado BC. Se $AM = \frac{BC}{2}$, mostre que ∠BAC= 90°.

20. Seja ABCDEF Um hexágono convexo tal que as diagonais AD, BE e CF passam todas por um mesmo ponto M que as divide ao meio. Calcule ∠A+∠B+∠C.

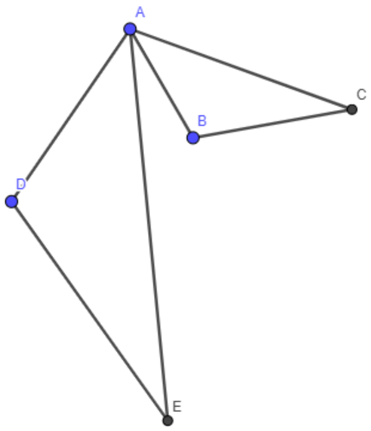
21. Seja I o incentro de um triângulo ABC e J o seu A-exincentro, isto é, o exincentro relativo ao vértice A. Prove que $\angle \mathrm{BIC} = 90° + \frac{\angle \mathrm{BAC}}{2}$ e $\angle \mathrm{BJC} = 90 - \frac{\angle \mathrm{BAC}}{2}$.

22. Sejam I, I_a, I_b, I_c o incentro, A-exincentro, B-exicentro e C-exincentro, respectivamente, de um triângulo ABC.

a) Prove que os triângulos AIB e ACI_a são semelhantes e conclua que $AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$.

b) Prove que os triângulos AI_bC e ABI_c são semelhantes e conclua que $AI_b \cdot AI_c = AB \cdot AC$.

23. Sejam ABC e ADE dois triângulos semelhantes, nessa ordem. Prove que os triângulos ABD e ACE também serão semelhantes, nessa ordem.



24. Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto sobre o lado BC e Y um ponto sobre o circuncírculo de ABC (isto é, a circunferência que passa por A, B e C) sobre o arco que não contém o vértice A. Suponha que ∠BAX=∠CAY. Prove que os triângulos ABX e AYC são semelhantes, e conclua que $AX \cdot AY = AB \cdot AC$.

25. Seja ABC um triângulo e P um ponto em seu interior. As retas AP, BP e CP intersectam BC, CA e AB em X, Y e Z, respectivamente.

a) Construa um paralela a BC passando por P. Essa paralela cortará AB e AC em X_1 e X_2, respectivamente. Mostre que $\frac{BX}{CX} = \frac{PX_1}{PX_2}$.

b) Defina Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 de maneira similar, com X_1 e Y_2 sobre AB, Z_1 e X_2 sobre AC e Y_1 e Z_2 sobre BC. Mostre que os triângulos ABC e PY_1Z_2 são semelhantes e conclua que ${}^{PZ_2}/_{PY_1} = {}^{AB}/_{AC}$

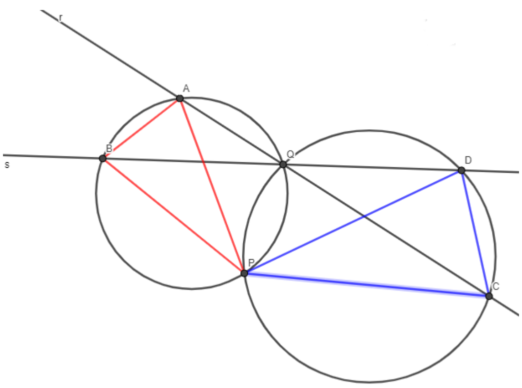
c) Pelo item (a) mostre que $\frac{PY_1}{PZ_2} \cdot \frac{PX_1}{PY_2} \cdot \frac{PZ_1}{PX_2} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}$

d) Finalmente, pelos itens (b) e (c), prove que $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

e) Seja ABC um triângulo, e sejam R, S e T pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que $\frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SA} \cdot \frac{AT}{TB} = 1$. Prove que AR, BS e CT concorrem.

Com isso, acabamos de provar o *teorema de Ceva*:
"Em um triângulo ABC, sejam X, Y e Z pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Então AX, BY e CZ concorrem se, e somente se, $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$."

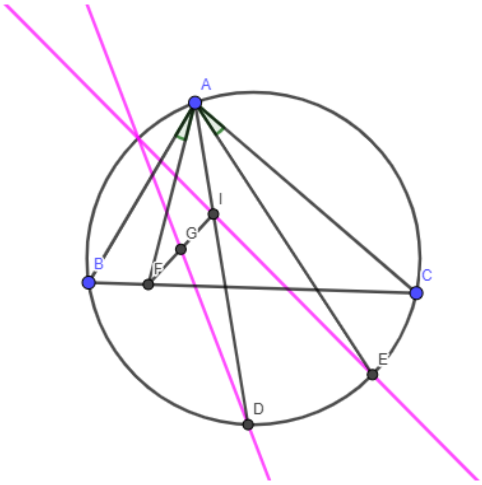
26. Considere duas circunferências Γ_1 e Γ_2 que se intersectam em dois pontos P e Q. Sejam r e s duas retas que passam por Q. A reta r intersecta Γ_1 e Γ_2 em A e C, respectivamente. A reta s intersecta Γ_1 e Γ_2 em B e D, respectivamente. Veja a figura abaixo:



Prove que $\Delta PAB \sim \Delta PCD$.
Dica: Prove que $\Delta PAC \sim \Delta PBD$ e utilize o exercício 23.
Tal semelhança é conhecida como *semelhança espiral*.

27. O seguinte problema foi abordado na 51ª Olimpíada Internacional de Matemática, ocorrida em 2010. O enunciado original (traduzido para o português) segue abaixo:
"Seja ABC um triângulo, I o seu incentro e Γ sua circunferência circunscrita. A reta AI intersecta novamente Γ no ponto D. Sejam E um ponto do arco BDC e F um ponto do lado BC tais que $\angle BAF = \angle CAE < {}^{\angle BAC}/_{2}$. Seja G o ponto médio do segmento IF. Mostre que as retas DG e EI se intersectam sobre Γ."

Inicialmente vejamos a figura do problema:



Resolveremos este problema utilizando alguns dos exercícios trabalhados anteriormente através de alguns passos. Vejamos:
Passo 1) Seja J o A-exincentro do triângulo ABC. Utilizando os exercícios 22a e 24, mostre que os triângulos AEI e AJF são semelhantes.
Passo 2) Utilizando o exercício 17e, mostre que DG é base média relativa a JF no triângulo IJF. Daí, DG e JF são paralelos.
Passo 3) Através dos dois primeiros passos, conclua que $\angle AEI = \angle ADG$, e considere P a intersecção das retas EI e DG. A partir disso conclua que $\angle DPI = \angle IAE$.
Passo 4) Por fim, observa-se que $\angle DPE = \angle DAE$, então P estará sobre Γ, concluindo assim o problema.

*Observação: Os exercícios 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11 foram extraídos do livro Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 9, 7ª edição, Dolce, Osvaldo ; Pompeo, José Nicolau