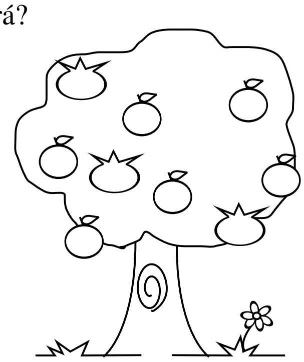
PARIDADE E TABULEIROS

Prof. Bruno Holanda

Semana Olímpica 2019 - Anápolis-GO

Todo número é par ou ímpar. Óbvio, não? Pois é com essa simples afirmação que vamos resolver os problemas deste capítulo.

Problema 1. No reino da Frutilândia, existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia, um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maçã. Após alguns dias, restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?



Problema 2. Um jogo consiste de nove botões luminosos (de cor verde ou amarela) dispostos da seguinte forma:

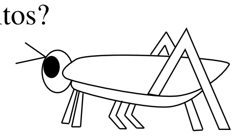
1◯	2◯	3◯
4◯	5◯	6◯
7◯	8◯	9◯

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus oito vizinhos, porém ele, não. Inicialmente, todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos amarelos?

Problema 3. (Leningrado 1990) Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas enumeradas de 1 a 192. Nícolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nessas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

Problema 4. (Leningrado 1989) Um grupo de K físicos e K químicos está sentado ao redor de uma mesa. Alguns deles sempre falam a verdade e outros sempre mentem. Sabe-se que o número de mentirosos entre os físicos e químicos é o mesmo. Quando foi perguntado: "Qual é a profissão de seu vizinho da direita?", todos responderam "Químico". Mostre que K é par.

Problema 5. Um gafanhoto vive na reta coordenada. Inicialmente, ele se encontra no ponto 1. Ele pode pular uma ou cinco unidades, tanto para a direita quanto para a esquerda. Porém, a reta coordenada possui buracos em todos os pontos que são múltiplos de 4 (i.e., existem buracos nos pontos $-4, 0, 4, 8$ etc.), então ele não pode pular para esses pontos. Pode o gafanhoto chegar ao ponto 3 após 2003 saltos?



Problema 6. Existe alguma solução inteira para a equação

$$a \cdot b \cdot (a - b) = 45045?$$

Problema 7. É possível que as seis diferenças entre dois elementos de um conjunto de quatro números inteiros sejam iguais a 2, 2, 3, 4, 4 e 6?

Problema 8. Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

Problema 9. (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isso?

Problema 10. (Rússia 2004) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro 9×2004, de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

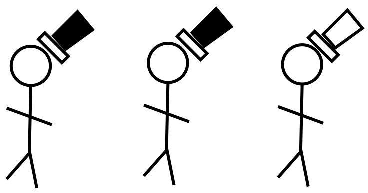
Problema 11. (Ucrânia 1997) Considere um tabuleiro pintado de preto e branco da maneira usual e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada coluna e em cada linha seja par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

Problema 12. (OBM 2017) Seja $n > 1$ um inteiro e considere um tabuleiro $n \times n$, em que algumas das n^2 casas foram pintadas de preto, e as restantes foram pintadas de branco. Prove que e possível escolhermos uma das n^2 casas do tabuleiro, de modo que, ao removermos completamente a linha e a coluna que a contém, haja um número diferente de casas pretas e de casas brancas, dentre as $(n-1)^2$ casas restantes

Problema 13. Imagine que 10 prisioneiros estejam trancados em uma cela quando chega um carcereiro com o seguinte comunicado:

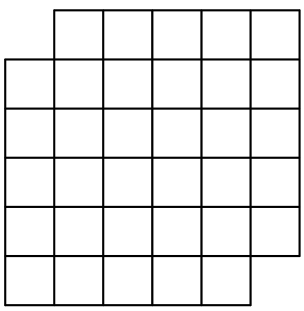
— *Amanhã, todos vocês passarão por um teste. Todos vocês ficarão em fila indiana e serão colocados chapéus nas cabeças de um de vocês. Cada um poderá ver os chapéus dos que estarão à sua frente. Porém, não poderão ver os chapéus dos que estão atrás, nem seu próprio chapéu. Os chapéus serão pretos ou brancos. Feito isso, será perguntado a cada um de vocês, do último para o primeiro, em ordem, qual a cor do seu chapéu. Se a pessoa errar a cor do seu chapéu, será morta.*

Será que os prisioneiros podem montar uma estratégia para salvar pelo menos nove deles?

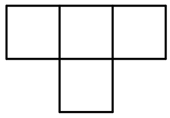


Nos problemas a seguir, as peças podem ser rotacionadas, refletidas ou giradas.

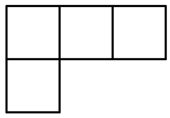
Problema 14. Determine se é possível cobrir ou não o tabuleiro abaixo (sem sobreposições) usando apenas dominós?



Problema 15. Podemos cobrir um tabuleiro 10×10 usando apenas T-tetraminós como abaixo?

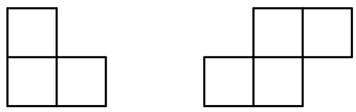


Problema 16. Para que valores de n, m podemos cobrir um tabuleiro $n \times m$ usando apenas L-tetraminós como abaixo?



Problema 17. É possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro 4×10 exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?

Problema 18. (Estônia 1993) Para quais naturais n é posível cobrir um retângulo de tamanho $3 \times n$ com peças mostradas na figura abaixo sem sobreposição?



Problema 19. (Rioplatense) Qual é o número máximo de peças 1×4 que podemos colocar em um tabuleiro 10×10 de modo que não tenham duas peças se tocando? (considera-se tocar quando temos pelo menos um vértice de uma peça tocando a outra)

Problema 20. (Torneio das Cidades 1997) Qual o número máximo de cavalos que podemos colocar em um tabuleiro 5×5 de modo que nenhum deles ataque um outro.

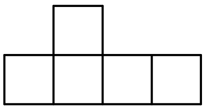
Problema 21. Ache o menor lado de um tabuleiro quadrado que pode ser montado usando um mesmo número de peças de cada um dos tipos abaixo.

Problema 22. Sobre uma das casas de um tabuleiro infinito, existe um cubo que cobre a casa perfeitamente. A face no topo do cubo é branca, enquanto as demais faces são pretas. A cada passo, podemos tombar o cubo para um dos lados. É possível que:

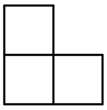
(a) Após 2004 passos o cubo volte ao mesmo quadrado com a face branca para baixo?

(b) Após 2005 passos?

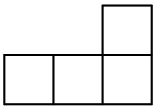
Problema 23. É possível cobrir um tabuleiro 5×10 usando apenas peças como abaixo?



Problema 24. Queremos cobrir um tabuleiro 7×7 usando várias peças de dois tipos:



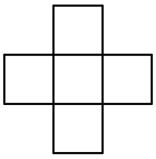
Tipo 1



Tipo 2

Diga como cobrir o tabuleiro usando o menor número possível de peças do tipo 1.

Problema 25. (Rússia 1997) Podemos cobrir um tabuleiro 75×75 usando dominós e cruzes (como na figura a seguir)?



Problema 26. (Rioplatense 1999) É possível cobrir um tabuleiro 1999×1999 com quadrados de lados inteiros maiores que 35 e menores que 1999?
PS: Os quadrados podem ser de tamanhos distintos.

Problema 27. (Rússia 2007) As faces de um cubo $9 \times 9 \times 9$ são particionas em quadradinhos da forma usual. Sua superfície é coberta por 243 tiras de papel 2×1 sem sobreposição. Uma tira é dita *dobrada* se não está apenas sobre uma face. Prove que o número de tiras dobradas é ímpar.

Problema 28. Podemos cobrir uma caixa $10 \times 10 \times 10$ com 250 caixas $1 \times 1 \times 4$?

Problema 29. Um tabuleiro $n \times m$ foi totalmente coberto usando peças 4×1 e 2×2. Em seguida, todas as peças foram retiradas do tabuleiro e uma peça 2×2 foi substituída por uma peça 4×1. Prove que o tabuleiro não poderá ser mais coberto com essa troca.

Problema 30. De um tabuleiro $n \times n$ são retiradas suas quatro casas do quanto. Quais são os valores de n para os quais esse tabuleiro quebrado é coberto por L-tetraminós?

Problema 31. Sejam m e n inteiros maiores que 1. Se um tabuleiro $m \times n$ pode ser coberto com L-tetraminós então é mn é múltiplo de 8.

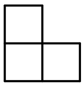
Problema 32. (Macedônia 2003) Um tabuleiro 2003×2003 pode ser coberto por dominós 1×2 horizontais e peças 3×1 verticais?

Problema 33. Um tabuleiro 7×7 é coberto usando 16 peças 3×1 e um monominó. Determine todas as posições possíveis do monominó.

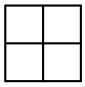
Problema 34. (Estônia 2004) Um tabuleiro 5×5 é coberto por oito *t-triminós* e um *monominó*. Determine todas as possíveis possições que o monominó pode ocupar.

Problema 35. Qual o número máximo de S-tetraminós podem ser colocados, sem sobreposições em um tabuleiro 10×10?

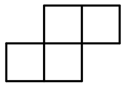
Problema 36. Um tabuleiro 7×7 é coberto usando peças dos seguintes tipos:



(1)



(2)



(3)

Prove que uma e apenas uma peça com quatro casas é usada.