Probleminhas pseudoalgébricos com soluções elegantemente carteadas

XXII Semana Olímpica

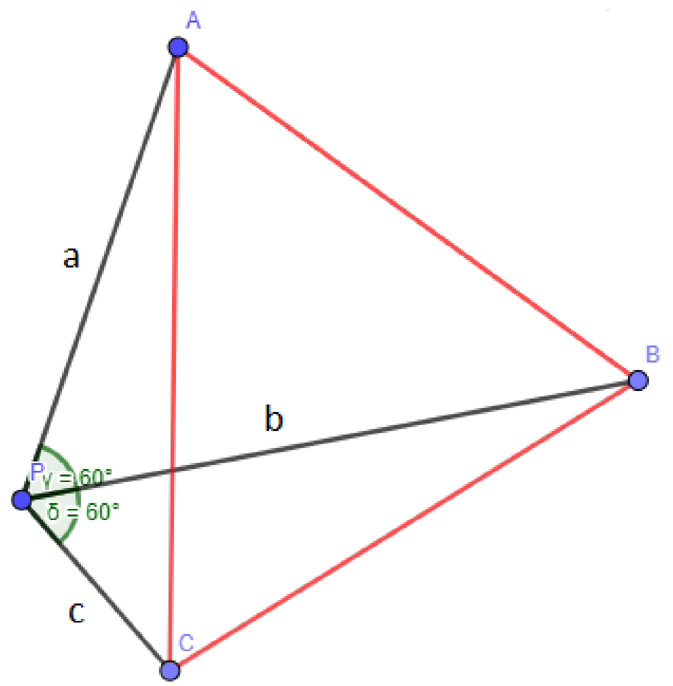
Nível 3

George Lucas

1. Sejam a, b e c números reais positivos. Prove a desigualdade:
$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$
e determine os casos de igualdade.

Solução:

Inicialmente imaginemos pontos $P, A, B\ e\ C$ no plano tais que os comprimentos dos segmentos $PA, PB\ e\ PC$ medem, respectivamente, a, b e c, e os ângulos $\angle APB = \angle BPC = 60°$.



Aplicando lei dos cossenos no triângulo ΔAPB, obtemos:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - ab$$

Aplicando lei dos cossenos no triângulo ΔBPC, obtemos:

$$BC^2 = b^2 + c^2 - bc$$

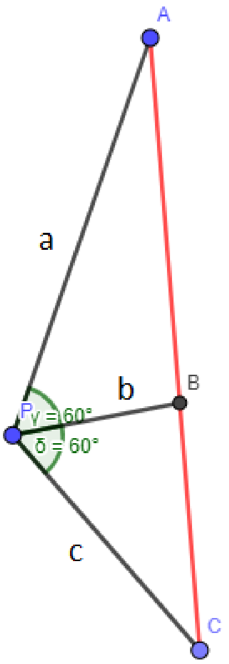
Aplicando lei dos cossenos no triângulo ΔAPC, obtemos:

$$AC^2 = a^2 + c^2 + ac$$

Pela desigualdade triangular, temos que $AB + BC \geq AC$ e a desigualdade do enunciado segue.

Vejamos agora quais os casos de igualdade.

A igualdade irá ocorre se, e somente se, $A, B\ e\ C$ são colineares.



Observe que $A, B, C\ são\ colineares\ \leftrightarrow [\Delta PAB] + [\Delta PBC] = [\Delta PAC] \leftrightarrow \frac{ab \cdot sen(60°)}{2} + \frac{bc \cdot sen(60°)}{2} = \frac{ca \cdot sen(120°)}{2} \leftrightarrow ab + bc = ca \leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$.

Portanto a igualdade irá ocorrer se, e somente se, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$.

2. (APMO 1999) Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sequência de números reais satisfazendo $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ para todo $i, j = 1,2,3, \ldots$. Prove que
$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$
para cada inteiro positivo n.

Solução:

Inicialmente, observe que a condição do problema pode ser facilmente estendida, por indução, para $a_{i_1+i_2+\cdots+i_k} \leq a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$.

Denote P_n o conjunto das permutações de $\{1,2, \ldots, n\}$.

Para cada $\pi \in P_n$ denote por $f(\pi, k)$ a quantidade de órbitas de tamanho k em π, isto é, $f(\pi, k)$ denota a quantidade de subconjuntos $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $\pi(j_i) = j_{i+1}$, para todo $i = 1,2, \ldots, k$, onde $j_{k+1} = j_1$.

Veja que

$$1f(\pi, 1) + 2f(\pi, 2) + \cdots + nf(\pi, n) = n$$

pois ambos os lados da igualdade contam o número de elementos da permutação π.

Veja agora que

$$\sum_{\pi\in P_n} f(\pi,k) = número\ total\ de\ órbitas\ de\ tamanho\ k\ (contadas\ com\ multiplicidade)$$

$$em\ todas\ as\ permutações\ de\ S_n$$

Por outro lado, considere quaisquer k elementos de $\{1,2,\dots,n\}$ e coloque-os ordenadamente em uma circunferência (considerando duas configurações tal que uma pode ser obtida através de uma rotação da outra como iguais). Podemos escolher os k elementos de $\binom{n}{k}$ maneiras e ordená-los de $(k-1)!$ maneiras. Após tal ordenação, considere uma permutação π que leva cada elemento da circunferência no seguinte (seguindo o sentido horário). Essa órbita que nós construímos irá aparecer em $(n-k)!$ permutações (pois os elementos restantes podem ser permutados de $(n-k)!$ maneiras).

Logo, o número total de órbitas de tamanho k (contadas com multiplicidade) em S_n é

$$\binom{n}{k}(k-1)!\,(n-k)! = \frac{n!}{k}$$

Portanto,

$$\sum_{\pi\in P_n} f(\pi,k) = \frac{n!}{k}$$

Agora, veja que

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in P_n} f(\pi,1)a_1 + f(\pi,2)a_2 + \cdots + f(\pi,n)a_n \geq$$

$$\geq \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in P_n} a_{1f(\pi,1)+2f(\pi,2)+\cdots+nf(\pi,n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in P_n} a_n = a_n$$

como queríamos.

3. (Ibero 2009) Considere a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida como segue:

   $$a_1 = 1, a_{2k} = 1 + a_k\ e\ a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}}$$

   Para todo $k \geq 1$. Prove que todo número racional positivo aparece na sequência $\{a_n\}$ exatamente uma vez.

Solução:

Considere a representação de um número racional positivo $\frac{p}{q}$ em frações contínuas, isto é,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_t}}}}$$

onde t é um inteiro não-negativo, a_0 é um inteiro não-negativo, $a_1, a_2, \dots, a_t$ são inteiros positivos, com $a_t \geq 2\ (se\ t > 0)$.

Por facilidade, representaremos

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_t]$$

Considere agora a representação binária de um inteiro positivo n:

$$n = 2^{v_0} + 2^{v_0+v_1} + 2^{v_0+v_1+v_2} + \cdots + 2^{v_0+v_1+\cdots+v_r}$$

onde r é um inteiro não-negativo , v_0 é um inteiro não-negativo e $v_1, v_2, \dots, v_r$ são inteiros positivos.

Mostremos, por indução forte em n, que

$$a_n = [v_0, v_1, \dots, v_{r-1}, v_r + 1]$$

Casos Iniciais:

$$n = 1\colon a_{2^0} = [0 + 1]$$

$$n = 2\colon a_{2^1} = [1 + 1]$$

$$n = 3\colon a_{2^0+2^{0+1}} = [0,1 + 1]$$

$$OK!$$

Hipótese de Indução:

Suponha que para algum $n \geq 4$ seja verdade, para todo $1 \leq n_0 < n$, a seguinte afirmação:

Se

$$n_0 = 2^{v_0} + 2^{v_0+v_1} + 2^{v_0+v_1+v_2} + \cdots + 2^{v_0+v_1+\cdots+v_r}$$

então

$$a_{n_0} = [v_0, v_1, \dots, v_{r-1}, v_r + 1]$$

Passo Indutivo:

Considere agora

$$n = 2^{u_0} + 2^{u_0+u_1} + 2^{u_0+u_1+u_2} + \cdots + 2^{u_0+u_1+\cdots+u_s}$$

Se n for par, então $u_0 \geq 1$, então

$$\frac{n}{2} = 2^{(u_0-1)} + 2^{(u_0-1)+u_1} + 2^{(u_0-1)+u_1+u_2} + \cdots + 2^{(u_0-1)+u_1+\cdots+u_s}$$

Assim, por hipótese de indução,

$$a_{\frac{n}{2}} = [u_0 - 1, u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s + 1]$$

Concluindo assim que

$$a_n = 1 + a_{\frac{n}{2}} = 1 + [u_0 - 1, u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_s + 1] = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_s + 1]$$

Se n for ímpar, então $u_0 = 0$, então

$$n - 1 = 2^{u_1} + 2^{u_1+u_2} + \cdots + 2^{u_1+\cdots+u_s}$$

Assim, por hipótese de indução,

$$a_{n-1} = [u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s + 1]$$

Concluindo assim que

$$a_n = {}^1\!/_{a_{n-1}} = {}^1\!/_{[u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s + 1]} = [0, u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s + 1]$$

A indução está completa!

Com isso, provamos que a sequência $\{a_n\}$ é uma bijeção dos inteiros positivos nos racionais positivos, como queríamos.

Agora é com vocês!

4. Sejam a, b e c inteiros positivos que não excedem $\frac{4}{3}n^2 + 2n + 1$. Prove que existem inteiros $x, y, z \in [-2n, 2n]$, não todos nulos, tais que $ax + by + cz = 0$.

5. (IMO SL 1996) A sequência $a(n), n = 1, 2, 3, \dots$ é definida como segue:
$$a(1) = 1$$
$$a(n) = a\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, para\ todo\ n > 1$$
   a) Determine o valor máximo de $\{a(n)\ |n \leq 1996\}$ e encontre todos os $n \leq 1996$ para o qual esse máximo é atingido.
   b) Para quantos $n \leq 1996$ obtemos $a(n) = 0$?

6. Sejam x, y e z reais positivos que satisfazem o sistema:
$$x^2 + xy + y^2 = 1$$
$$y^2 + yz + z^2 = 4$$
$$z^2 + zx + x^2 = 5$$
Determine o valor de $xy + yz + zx$.

7. (Sequência de Catalan) Considere a sequência $\{C_n\}_{n\geq 0}$ definida por:
$$C_0 = 1$$
$$C_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j}\ , para\ todo\ n \geq 1$$
Encontre uma fórmula fechada para os termos da sequência $\{C_n\}$.

8. Prove que o limite
$$\lim_{n\to\infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n\ radicais}$$
existe e calcule-o.

9. Seja n um inteiro positivo. Prove que para todo número real x é válida a seguinte igualdade:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\left(x^{n+1}(1-x)^{k}+x^{k}(1-x)^{n+1}\right)=1$$

10. Mostre que, para inteiros positivos m e n, é válida a seguinte igualdade:
$$2\sum_{k=0}^{m-1}\left\lfloor\frac{kn}{m}\right\rfloor=mdc(m,n)+mn-m-n$$

11. Seja n um inteiro positivo. Defina os conjuntos R e S de pares de inteiros como seguem:
$$R=\{(i,j)|1\le i<j\le n\,,mdc(i,j)=1\}$$
$$S=\{(i,j)|1\le i<j\le n\,,i|j\,\}$$
Sejam $x_1,x_2,\dots,x_n$ reais não-negativos cuja soma é 1.
    a) Seja $\pi(n)$ a quantidade de inteiros positivos primos que não excedem n, determine o valor máximo de
    $$\sum_{(i,j)\in R}x_ix_j$$
    b) Determine o valor máximo de
    $$\sum_{(i,j)\in S}x_ix_j$$

12. (IMO 1988) Uma função f definida nos inteiros positivos e tomando valores inteiros positivos é dada por:
$$f(1)=1,f(3)=3$$
$$f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$$
para todos os inteiros positivos n. Determine a quantidade de inteiros positivos $k\le 1988$ para os quais $f(k)=k$.

13. (Vingança Olímpica 2011) Sejam p,q,r,s e t reais positivos satisfazendo:
$$p^2+pq+q^2=s^2$$
$$q^2+qr+r^2=t^2$$
$$r^2+rp+p^2=s^2-st+t^2$$
Prove que
$$\frac{s^2-st+t^2}{s^2t^2}=\frac{r^2}{q^2t^2}+\frac{p^2}{q^2s^2}-\frac{pr}{q^2ts}$$

14. (IMO SL 2006) Seja S um conjunto finito de pontos no plano tal que não há 3 deles colineares. Para cada polígono convexo P cujos vértices estão em S, sejam $a(P)\ e\ b(P)$ o número de vértices de P e o número de vértices de S que estão no exterior de P, respectivamente. Aqui consideramos o segmento, o ponto e o conjunto vazio como polígonos convexos de 2, 1 e 0 vértices, respectivamente. Prove que para todo número real x

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

onde a soma é tomada sobre todos os polígonos convexos com vértices em S.

15. (RMM 2013) Dado um inteiro positivo $k \geq 2$, seja $a_1 = 1$ e, para todo $n \geq 2$, seja a_n a menor solução inteira da equação

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor$$

que excede a_{n-1}. Prove que todos os inteiros positivos primos são termos da sequência $a_1, a_2, \ldots$.

16. (CIIM 2018) Seja (x_n) uma sequência de números reais no intervalo [0,1). Prove que existe uma sequência crescente $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ de inteiros positivos tal que existe o limite

$$\lim_{\substack{i,j\to\infty \\ i\neq j}} x_{n_i+n_j}$$

ou seja, existe um número real L tal que para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo N de maneira que se $i, j > N$ com $i \neq j$, então $\left|x_{n_i+n_j} - L\right| < \epsilon$.

17. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ reais não-negativos tais que $x_i + y_i = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Prove que

$$(1 - x_1 x_2 \ldots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \ldots (1 - y_n^m) \geq 1$$

para todo inteiro positivo m.

18. (IMO SL 1989 – Generalização) Seja $q > 1$ um inteiro positivo. Defina a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ por:

$$\sum_{d|n} a_d = q^n$$

para todo inteiro positivo n. Prove que $\frac{a_n}{n}$ é um inteiro positivo.

19. (IMC 2011) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos não-vazios. Defina a função

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_k}|}$$

Prove que f é não decrescente em [0,1].

Observação: $|A|$ denota a quantidade de elementos do conjunto A.

20. (Teste Cone Sul 2014) Considere a função dos racionais positivos nos racionais positivos

$$f(x) = 2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - \frac{1}{x} + 1$$

Mostre que na sequência

$$1, f(1), f\big(f(1)\big), f\Big(f\big(f(1)\big)\Big), f\Big(f\Big(f\big(f(1)\big)\Big)\Big), \ldots$$

cada racional positivo aparece exatamente uma vez.

21. Seja n um inteiro positivo. Prove que para todo x real é válida a seguinte igualdade:

$$\sum_{k=0}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \binom{n-k+1}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{4x+1}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

22. Suponha que a, b e c são números reais positivos tal que para todo inteiro n,

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor$$

Prove que pelo menos um dos números a, b, c é inteiro.

23. (IMO 2001) Sejam $a > b > c > d$ inteiros positivos que satisfazem

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

Prove que $ab + cd$ não é primo.

24. (IMO SL 2013) Seja n um inteiro positivo, e considere a sequência $a_1, a_2, \dots, a_n$ de inteiros positivos. Extenda-a periodicamente para uma sequência infinita $a_1, a_2, \dots$ definida por $a_{n+i} = a_i$ para todo $i \geq 1$. Se

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$$

e

$$a_{a_i} \leq n + i - 1 \; para \;\; i = 1, 2, \dots, n$$

Prove que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n^2$$