

# Invariantes e Monovariantes

Veremos como resolver alguns problemas que envolvem *estados e operações*. Problemas desse tipo incluem jogos, coberturas de tabuleiros, e podem ter contextos em praticamente qualquer uma das quatro grandes áreas (Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números).

## 1 Invariantes

Há problemas envolvendo um conjunto  $S$  de estados e regras, de acordo com as quais pode-se passar de um estado para outro. Como podemos provar que, dado um estado inicial  $s_0 \in S$  e seguindo as regras, nunca é possível atingir um outro estado (estado final)  $s_n \in S$ ?

O método frequentemente usado é baseado na seguinte observação: suponha que  $f(s)$  é uma função, definida para todo  $s \in S$ ; suponha também que, se de  $s_1 \in S$  passamos, de acordo com as regras, para  $s_2 \in S$ , então  $f(s_1) = f(s_2)$  para qualquer escolha de  $s_1$ . No caso em que essas condições são satisfeitas, se  $f(s_0) \neq f(s_n)$  concluímos imediatamente que partindo de  $s_0$  nunca se pode chegar a  $s_n$  seguindo as regras.

Mas como achar tal função  $f$  (o invariante)? Às vezes o invariante é imediato. Pode ser, por exemplo, a paridade de alguma característica do sistema. Se observarmos que a característica do sistema é originalmente um número ímpar, e no pretendido estado final tal característica é um número par, então ele não pode ser alcançado (isto, é claro, se a característica inicial for invariante).

**Exemplo 1.** Dentro de uma caixa há 1995 bolas pretas e 2000 bolas brancas, e fora dela há 5000 bolas brancas. Retiramos da caixa 2 bolas. Se elas forem da mesma cor então retornamos uma bola branca. Se elas forem de cores diferentes retornamos uma bola preta. Repete-se o processo até que reste uma única bola na caixa. Qual pode ser a sua cor?

*Solução.* Perceba que se as duas bolas retiradas são brancas ou são de cores diferentes, o número de bolas pretas não se altera. Se as duas bolas retiradas são pretas, então o total de bolas pretas é reduzido de duas unidades. Então a paridade do número de bolas pretas é invariante, e neste caso é ímpar. Portanto não é possível que acabem todas as bolas pretas na caixa, logo a bola restante ao final do processo é preta.

Tendo em vista esse exemplo inicial, fica a seguinte pergunta:

### 1.1 Como encontrar o invariante?

Tudo acaba ficando muito fácil se alguém diz qual é o invariante. Mas, nos problemas, o normal é termos que *encontrá-lo*. Como fazer isso? Há várias ideias que ajudam a fazer isso:

- Estudar alguns casos particulares e procurar um padrão.
- Como o invariante depende fortemente das operações que fazemos, é de extrema importância estudar essas operações e ficar atento ao que não muda com essa operação.
- Há alguns invariantes do tipo “a experiência indica que ele vai dar certo”. É bom ter alguns em mente. O que acabamos de usar, a paridade, é um bom exemplo.

Além disso, tenha em mente que:

- **os melhores invariantes são aqueles que eliminam a maior quantidade possível de estados.** Invariantes do tipo “a operação entre dois números sempre retorna um número” não são muito úteis exatamente por não eliminarem caso algum.
- **você pode usar invariantes diferentes para resolver um problema.** Ou seja, não há “o” invariante. Há *vários*.
- **talvez você precise de mais de um invariante para resolver um problema.** Se uma ideia de invariante não deu certo de cara, você pode, ao invés de descartá-lo, associá-lo com outro invariante.

**Exemplo 2.** (Cone Sul) Define-se o conjunto de 100 números  $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/100\}$ .

Eliminamos dois elementos quaisquer  $a$  e  $b$  deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número  $a + b + ab$  ficando assim um conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, fica só um número. Que valores pode ter esse número?

*Solução.* Primeiro, vamos entender o que são os estados e a operação. Os estados são os conjuntos obtidos e a operação é trocar  $a, b$  por  $a + b + ab$ .

Vamos fazer *um caso particular*: vamos fazer a operação com os termos na ordem:

$$\begin{aligned} 1, \frac{1}{2} &\rightarrow 1 + \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ 2, \frac{1}{3} &\rightarrow 2 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 3 \\ 3, \frac{1}{4} &\rightarrow 3 + \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 4 \\ &\vdots \\ 99, \frac{1}{100} &\rightarrow 99 + \frac{1}{100} + 99 \cdot \frac{1}{100} = 100 \end{aligned}$$

Note que apareceu um padrão interessante. Mas, ainda assim, podemos fazer as operações em outra ordem. O que aconteceria? Fica difícil de ver sem achar algum invariante. Vamos *estudar um pouco melhor a operação*. O que acontece se fizermos com 1 e  $a$ ? Obtemos  $a + 1 + a \cdot 1 = 2a + 1$ . E  $\frac{1}{2}$  e  $a$ ? Obtemos  $a + \frac{1}{2} + a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a+1}{2}$ . Ainda não parece muito elucidativo. Mas se se fizermos a operação duas vezes com três números genéricos  $a, b, c$ ? Obtemos  $ab + a + b$  primeiro e depois  $(ab + a + b)c + ab + a + b + c = abc + ab + bc + ca + a + b + c$ . Note que obtemos uma expressão simétrica em  $a, b, c$ , ou seja, a ordem com que fizemos as operações *não altera* seu resultado. Nosso invariante está encontrado! **A ordem em que fazemos as operações não importa!** Com isso, a resposta só pode ser uma: 100.

Esse tipo de problema pode ter vários invariantes! Vejamos outra solução:

*Solução.* Note que a operação consiste em trocar  $a$  e  $b$  por  $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$ . Talvez seja interessante então considerar  $E = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ . Ao realizar a operação com  $a_i$  e  $a_j$ , mudamos  $E$  para  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_{i-1} + 1)(a_{i+1} + 1) \dots (a_{j-1} + 1)(a_{j+1} + 1) \dots (a_k + 1)(a_i a_j + a_i + a_j + 1) = E$ . Ou seja,  $E$  não muda! Isso quer dizer que, sendo  $M$  o número que fica no final,

$$M + 1 = (1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{101}{100} = 101 \iff M = 100.$$

**Exemplo 3.** No planeta colorido, os únicos habitantes são camaleões, que são verdes, amarelos ou azuis. A lei do planeta dita que os camaleões mudam de cor se, e somente se, dois camaleões de cores diferentes se encontram; nesse caso, ambos mudam para a terceira cor. Sendo  $a, b$  e  $c$  as quantidades iniciais de camaleões verdes, amarelos e azuis, respectivamente, para que valores das ternas  $(a, b, c)$  é possível que os camaleões fiquem da mesma cor?

*Solução.* Os estados são as quantidades de camaleões de cada cor, que representaremos por ternas ordenadas  $(x, y, z)$ . As operações são do tipo

$$(x, y, z) \rightarrow (x - 1, y - 1, z + 2)$$

O estado final a ser estudado é da forma  $(n, 0, 0)$ . Mas e o invariante? Um invariante é o total de camaleões, que não muda. Mas esse invariante não parece ser útil, por não restringir nada. Além disso, seria conveniente que as operações não dependessem de qual é a cor que aumenta. Ou seja, seria ótimo se  $-1 = 2 \dots$

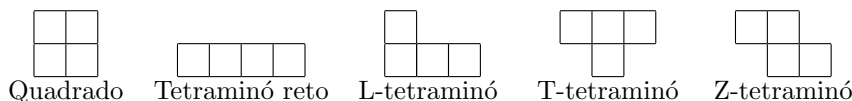
Mas isso ocorre em um conjunto: os números vistos módulo 3 (ou seja, ver o resto da divisão por 3). Logo, vendo módulo 3, cada operação diminui cada coordenada de 1. Assim, se no final queremos ter  $(n, 0, 0)$  no começo devemos ter dois números com o mesmo resto na divisão por 3. Logo uma *condição necessária* é haver dois números que deixam o mesmo resto na divisão por 3.

Essa condição também é suficiente? Isso acontece com frequência nesse tipo de problema: devemos verificar se o que sobrou pode ser obtido. Nesse caso, a resposta é sim! Seja  $(a, b, c)$  o estado inicial, com (sem perda de generalidade)  $a$  e  $b$  com o mesmo resto na divisão por 3. Suponha, sem perda de generalidade, que  $a \geq b$ , ou seja, que  $a = b + 3k$ . Suponha que os camaleões verdes e amarelos se encontram de modo a acabarmos com os camaleões amarelos. Com isso, subtraímos  $b$  de  $a$  e  $b$  e somamos  $2b$  a  $c$ , obtendo  $(3k, 0, c + 2a)$ . Se  $k = 0$ , o problema acabou. Se  $k > 0$ , a ideia é diminuir a quantidade de camaleões verdes de 3 em 3: para isso, realizamos as operações  $(3k, 0, c + 2a) \rightarrow (3k - 1, 2, c + 2a - 1) \rightarrow (3k - 2, 1, c + 2a + 1) \rightarrow (3k - 3, 0, c + 2a + 3)$ . Aí em algum momento a quantidade de camaleões verdes chega a zero, e terminamos.

## 1.2 Problemas com tabuleiros

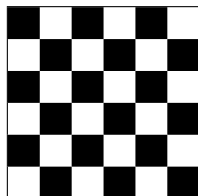
Problemas de tabuleiros do tipo “é possível cobrir um tabuleiro com tais peças?” ou com jogos de peças no tabuleiro podem ser resolvidos com um tipo especial de invariante: *pinturas*.

**Exemplo 4.** Quais dos cinco tetraminós podem ser usados para cobrir um tabuleiro  $6 \times 6$ ? Você tem nove cópias de cada tetraminó e pode girar e virar os tetraminós. Só não pode misturar tetraminós diferentes!

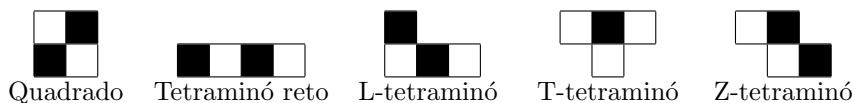


*Solução.* Obviamente o tetraminó quadrado cobre o tabuleiro  $6 \times 6$ . E quanto aos outros?

A resposta é *não*! O segredo, na maioria dos casos, é encontrar pinturas que sejam regulares em peças e irregulares no tabuleiro, ou vice-versa. Começemos com a clássica pintura de xadrez:



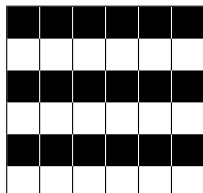
Os tetraminós podem ficar:



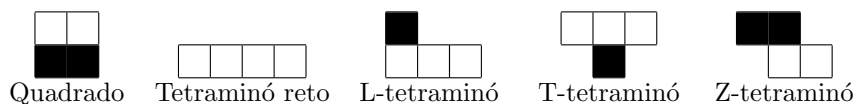
Note que, nessa pintura, o T-tetraminó fica com três quadradinhos de uma cor e uma da outra cor. Nos outros tetraminós há sempre dois de cada, e no tabuleiro, a mesma quantidade

de casas brancas e pretas. Isso quer dizer que só podemos trabalhar bem com o T-tetraminó. De fato, para balancear o tabuleiro precisamos da mesma quantidade de T-tetraminós com três casas brancas e uma preta e com três casas pretas e uma branca. Mas isso quer dizer que a quantidade de T-tetraminós é par, quando tem que ser 9, absurdo. Logo não é possível preencher o tabuleiro com T-tetraminós. De fato, qualquer maneira de preencher o tabuleiro, mesmo misturando tetraminós, deve ter uma quantidade par de T-tetraminós.

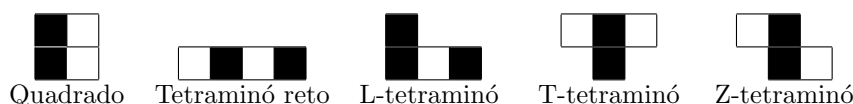
Essa pintura não resolve o problema dos outros tetraminós. Mas fazer outra pintura: pintura em listas.



Os tetraminós podem ficar:



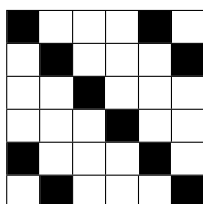
Parece que essa pintura elimina o tetraminó reto, o L-tetraminó e o T-tetraminó. Mas isso não é verdade. Eles podem estar virados, e a pintura fica



Note que o tetraminó reto e o T-tetraminó, quando estão nessas posições, têm duas casas de cada cor. Assim, enquanto as quantidades dessas peças na horizontal devem ser pares, as quantidades na vertical podem ser quaisquer, e isso estraga nosso argumento. Isso acontece porque agora faz diferença ficar na horizontal ou na vertical.

Mas o L-tetraminó continua com três casas de uma cor e uma de outra, e, por argumentos análogos ao do T-tetraminós, a quantidade de L-tetraminós é par, e obtemos absurdo.

Faltam o tetraminó reto e o Z-tetraminó. O Z-tetraminó, na verdade, pode ser feito tentando preencher e vendo que não é possível (comece pelo canto e continue; a tarefa fica para o leitor). Quanto ao tetraminó, a ideia é trabalhar ao contrário, ou seja, fazer uma pintura que fique regular no tetraminó e irregular no tabuleiro! De fato, vamos pintar de modo que fique exatamente uma casinha pintada por tetraminó:



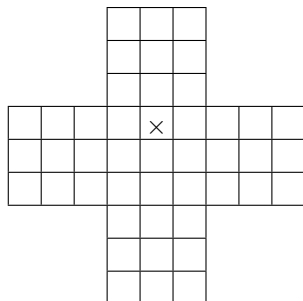
Há dez casas pintadas, um por tetraminó. Mas são nove tetraminós! Então não dá para preencher o tabuleiro com tetraminós.

*Comentário.* Não é possível preencher tabuleiros retangulares com Z-tetraminós, mas é possível preencher alguns tabuleiros retangulares com os outros tetraminós. Tente descobrir quais!

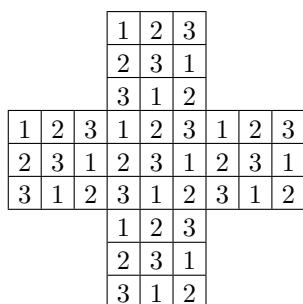
É claro que podemos ter também um jogo em um tabuleiro.

**Exemplo 5.** (*Resta Um*) Há uma peça em cada casa do tabuleiro mostrado a seguir, exceto na casa central. Um movimento consiste em escolher três casas seguidas na horizontal ou na vertical com duas casas vizinhas ocupadas e a outra vazia, tirar as duas peças nas casas ocupadas

e colocar uma peça na casa vazia (você pode pensar que uma peça “pula” a outra e a “come”). A meta do jogo é que fique somente uma peça no tabuleiro. É possível que essa peça fique na casa marcada com um  $\times$  abaixo?

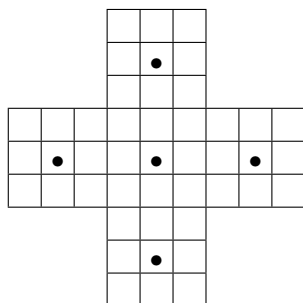


*Solução.* Se você jogar um pouco esse jogo (recomendamos fortemente fazê-lo... é divertido!), talvez ache que o problema é parecido com o problema dos camaleões. De fato, interprete as casas envolvidas em um movimento como as três cores: duas cores diminuem em uma unidade e a outra aumenta em uma (aí está a diferença; no problema dos camaleões, aumenta em dois). Nisso, podemos pensar na seguinte pintura:



Agora, seja  $k$  a quantidade de casas do tipo 1 ocupadas mais a quantidade de casas do tipo 2 ocupadas. Qualquer movimento não altera  $k$  ou o diminui em 2. Inicialmente, há 15 casas 1 ocupadas, 15 casas 2 ocupadas (e 14 casas 3 ocupadas), de modo que  $k$  é (e sempre será) par. Mas a situação final pedida requer  $k$  ímpar. Então não é possível terminar na casa com o  $\times$ .

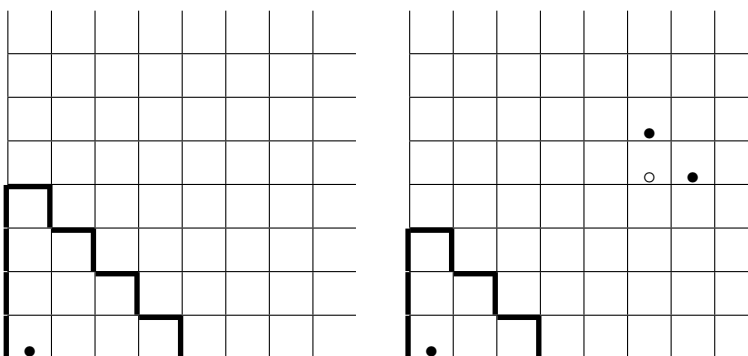
*Comentário.* Na verdade, com mais uma pintura, pode-se provar que a peça só pode ficar nas casas marcadas abaixo:



Pintura não é a única técnica importante para resolver problemas de tabuleiro. Outra ideia útil é a *função potencial*.

**Exemplo 6.** Considere o tabuleiro infinito a seguir, que consiste no primeiro quadrante dividido em quadrados unitários. Colocamos uma peça no canto inferior esquerdo. O movimento permitido é tomar uma peça na casa  $(x, y)$  e substituí-la por duas peças, uma na casa  $(x, y + 1)$  e outra na casa  $(x + 1, y)$ , desde que ambas as casas estejam vazias. É possível que a região delimitada pela linhas mais grossas fique sem peças dentro dela:

- (a) No tabuleiro da esquerda?  
 (b) No tabuleiro da direita?



*Solução.* Se você tentar fazer isso (tente!) vai começar a desconfiar que não é possível em ambos os casos.

Vamos montar um invariante. Para isso, associe a cada casa  $(x, y)$  um número  $I(x, y)$ . Para que seja um invariante de verdade, seria conveniente que  $I(x, y) = I(x + 1, y) + I(x, y + 1)$ . Há várias funções  $I(x, y)$  que satisfazem isso. Uma fácil é  $I(x, y) = \frac{1}{2^{x+y}}$ , a *função potencial*. Ela mede, de certo modo, o quão distante a casa está da origem.

|                 |                 |                 |                 |                    |                    |                    |  |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--|
|                 |                 |                 |                 |                    |                    |                    |  |
| $\frac{1}{2^6}$ | $\frac{1}{2^7}$ | $\frac{1}{2^8}$ | $\frac{1}{2^9}$ | $\frac{1}{2^{10}}$ | $\frac{1}{2^{11}}$ | $\frac{1}{2^{12}}$ |  |
| $\frac{1}{2^5}$ | $\frac{1}{2^6}$ | $\frac{1}{2^7}$ | $\frac{1}{2^8}$ | $\frac{1}{2^9}$    | $\frac{1}{2^{10}}$ | $\frac{1}{2^{11}}$ |  |
| $\frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^5}$ | $\frac{1}{2^6}$ | $\frac{1}{2^7}$ | $\frac{1}{2^8}$    | $\frac{1}{2^9}$    | $\frac{1}{2^{10}}$ |  |
| $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^5}$ | $\frac{1}{2^6}$ | $\frac{1}{2^7}$    | $\frac{1}{2^8}$    | $\frac{1}{2^9}$    |  |
| $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^5}$ | $\frac{1}{2^6}$    | $\frac{1}{2^7}$    | $\frac{1}{2^8}$    |  |
| $\frac{1}{2}$   | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^5}$    | $\frac{1}{2^6}$    | $\frac{1}{2^7}$    |  |
| 1               | $\frac{1}{2}$   | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^4}$    | $\frac{1}{2^5}$    | $\frac{1}{2^6}$    |  |

Então, a soma dos números nas casas ocupadas por peças é invariante e, portanto, igual a  $I(0, 0) = 1$ . Agora, vamos calcular a soma das casas dentro e fora da região.

A soma total  $S$  dos números nas casas do tabuleiro é a soma de várias séries geométricas:

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\
 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \\
 &+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots \\
 &= \frac{1}{1 - 1/2} + \frac{1/2}{1 - 1/2} + \frac{1/2^2}{1 - 1/2} + \dots \\
 &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \\
 &= \frac{2}{1 - 1/2} = 4
 \end{aligned}$$

Agora, no item a, a soma dos números dentro da região é  $1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} > 3$ , de modo que a soma dos números fora é menor do que 1, e não há como todas as peças ficarem fora.

No item b, a soma dos números dentro da região é  $1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4} < 3$ , e o mesmo argumento não funciona. Como consertar isso? Basta notar que a primeira linha e a primeira

coluna vão ter, cada um, exatamente uma peça (por quê?) e contribuem com no máximo  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$  na soma de fora. Assim, a soma de fora é no máximo  $4 - 2\left(2 - \frac{1}{8}\right) + 1 - \frac{1}{4} = 1$ . Mas essa soma só pode ser obtida se todas as *infinitas* casas forem ocupadas, o que não ocorre. Logo não há como todas as peças ficarem fora nesse caso também.

### 1.3 Problemas

1. Seja  $n$  um inteiro positivo ímpar. Em um quadro estão escritos os números de 1 a  $2n$ . Escolhemos então dois números  $a$  e  $b$ , apagamo-os, e escrevemos  $|a - b|$  em seu lugar, repetindo o processo até que haja somente um número no quadro. Prove que este número é ímpar.
2. (Cone Sul) Em uma lousa, estão escritos os números inteiros de 1 a 2014, inclusive. A operação válida é escolher dois números  $a$  e  $b$ , apagá-los e no lugar deles escrever o mínimo múltiplo comum de  $(a, b)$  e o máximo divisor comum de  $(a, b)$ .

Demonstre que, não importando a quantidade de operações realizadas, a soma dos números escritos na lousa é sempre maior do que  $2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$ .

3. (OBM) Iniciando com o par  $(2048, 1024)$ , podemos aplicar quantas vezes quisermos a operação que transforma o par  $(a, b)$  no par  $\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$ , então, dentre os seguintes pares:
  - (a)  $(1664, 1408)$
  - (b)  $(1540, 1532)$
  - (c)  $(1792, 1282)$
  - (d)  $(1537, 1535)$
  - (e)  $(1546, 1526)$
  - (A) Todos podem ser obtidos.
  - (B) Apenas o par 4 não pode ser obtido.
  - (C) Apenas o par 3 não pode ser obtido.
  - (D) Existem exatamente dois pares que não podem ser obtidos.
  - (E) Existem mais de dois pares que não podem ser obtidos.

4. (Cone Sul) Um jogo consiste de 9 botões (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte maneira:

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| ○ <sub>1</sub> | ○ <sub>2</sub> | ○ <sub>3</sub> |
| ○ <sub>4</sub> | ○ <sub>5</sub> | ○ <sub>6</sub> |
| ○ <sub>7</sub> | ○ <sub>8</sub> | ○ <sub>9</sub> |

Se é apertado um botão do bordo do quadrado trocam de cor ele e todos seus vizinhos, se é apertado o botão do centro trocam de cor seus 8 vizinhos, porém ele não. Os exemplos seguintes mostram com círculos *vermelhos* (●) as luzes que trocam de cor ao pressionar o botão que é indicado.

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| ○ <sub>1</sub> | ○ <sub>2</sub> | ● <sub>3</sub> |
| ○ <sub>4</sub> | ○ <sub>5</sub> | ● <sub>6</sub> |
| ● <sub>7</sub> | ● <sub>8</sub> | ● <sub>9</sub> |

Botão 1

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| ○ <sub>1</sub> | ○ <sub>2</sub> | ○ <sub>3</sub> |
| ○ <sub>4</sub> | ○ <sub>5</sub> | ○ <sub>6</sub> |
| ● <sub>7</sub> | ● <sub>8</sub> | ● <sub>9</sub> |

Botão 2

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| ○ <sub>1</sub> | ○ <sub>2</sub> | ○ <sub>3</sub> |
| ○ <sub>4</sub> | ● <sub>5</sub> | ○ <sub>6</sub> |
| ○ <sub>7</sub> | ○ <sub>8</sub> | ○ <sub>9</sub> |

Botão 5

É possível (apertando sucessivamente alguns botões) acender todas as luzes de cor verde, se inicialmente estavam todas acesas com a luz vermelha? Justifique a sua resposta.

5. (OBM) . Numa lousa estão escritos inicialmente os números  $1, 2, \dots, 10$ . Para quaisquer dois números  $a$  e  $b$  na lousa chamamos de  $S_{a,b}$  a soma de todos os números na lousa com exceção de  $a$  e  $b$ . Uma operação permitida é escolher dois números  $a$  e  $b$  na lousa, apagá-los e escrever o número  $a + b + \frac{ab}{S_{a,b}}$ . Após realizar essa operação algumas vezes restam na lousa apenas dois números  $x$  e  $y$ , com  $x \geq y$ .

- (a) Quantas operações foram realizadas?  
 (b) Determine o maior valor possível para  $x$ .

6. Cada um dos números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é igual a  $1$  ou  $-1$ , e  $x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0$ .

Prove que  $n$  é divisível por  $4$ .

7. Pablo escolhe um inteiro positivo  $n$  e escreve no quadro negro os  $2n + 1$  números

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \dots, \frac{n}{2n+1}.$$

Laura escolhe dois números escritos por Pablo,  $a$  e  $b$ , apaga-os e escreve o número  $2ab - a - b + 1$ . Depois de repetir este procedimento  $2n$  vezes, sobra apenas um único número no quadro negro. Determinar os possíveis valores deste número.

8. (Cone Sul) Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais.

Inicialmente há sobre a mesa só uma pilha e esta tem  $1000$  discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente  $3$  discos.

9. (Cone Sul) Temos um tabuleiro de  $m \times n$  casas. Atribui-se inicialmente um número inteiro não negativo a cada uma das casas. No tabuleiro é permitido efetuar a seguinte operação: em qualquer par de casas com um lado em comum pode-se modificar os dois números somando-lhes um mesmo número inteiro (que pode ser negativo), sempre que ambos resultados sejam não negativos.

Que condições devem ser satisfeitas inicialmente na atribuição dos números, para deixar, mediante aplicações reiteradas da operação, zero em todas as casas?

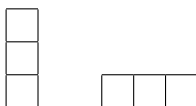
10. (Cone Sul) No plano cartesiano, considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em:

Escolher um destes pontos e realizar uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, com centro neste ponto.

É possível, através de uma sequência dessas operações, levar o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ , e  $(0, 1)$  no triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ ?

11. (Cone Sul) Há  $2012$  números em torno de uma circunferência, cada um igual a  $1$  ou  $-1$ . Não há  $10$  números consecutivos cuja soma é  $0$ . Encontre os possíveis valores da soma dos  $2012$  números.

12. (Cone Sul) Ana e Beto jogam em um tabuleiro de  $11$  linhas e  $9$  colunas. Primeiro Ana divide o tabuleiro em  $33$  zonas. Cada zona é formada por  $3$  casas adjacentes alinhadas vertical ou horizontalmente, como mostra a figura.





Depois, Beto escreve em cada casa um dos números  $0, 1, 2, 3, 4, 5$ , de modo que a soma dos números de cada zona seja igual a 5. Beto ganha se a soma dos números escritos em cada uma das 9 colunas do tabuleiro é um número primo; caso contrário, Ana ganha. Demonstre que Beto tem uma estratégia vencedora.

13. Em  $n$  posições distintas de um circuito circular existem  $n$  carros prontos para partir, os quais cobrem o circuito em uma hora. Ao ouvir o sinal, cada um deles escolhe uma direção e parte imediatamente. Dois carros ao se encontrarem trocam de direção instantaneamente e sem perda de velocidade.

Mostre que em certo momento todos os carros estarão novamente em seus pontos de partida.

14. (IMO) Num tabuleiro infinito no qual estão dispostas  $n^2$  peças, formando um quadrado  $n \times n$ , jogamos o *Resta Um*. Para quais valores de  $n$  há uma estratégia vencedora, ou seja, é possível terminar o jogo com apenas uma peça no tabuleiro?

## 2 Monovariantes

Considere as seguintes variáveis:

- Sua idade;
- A quantidade de biscoitos em um pacote de biscoitos;
- O número de vezes que você espirrou.

O que essas variáveis têm em comum? Cada uma delas é *monotônica*, ou seja, *nunca diminui* ou *nunca aumenta*. Esses tipos de variáveis são os *monovariantes*. Ou seja, elas variam em **só uma direção**.

Monovariantes são ótimos para *provar que alguns processos terminam*. Um exemplo disso é o *algoritmo de Euclides*.

**Exemplo 7.** O algoritmo de Euclides consiste em trocar sucessivamente o par de inteiros positivos  $(a, b)$ , com  $a > b$ , por  $(b, r)$ , em que  $r$  é o resto da divisão euclidiana de  $a$  por  $b$ , até que  $r = 0$ . O resultado do algoritmo é  $\text{mdc}(a, b)$ . Prove que o algoritmo eventualmente termina.

*Solução.* Basta notar que a segunda coordenada sempre diminui, pois o resto  $r$  na divisão euclidiana de  $a$  por  $b$  satisfaz  $0 \leq r < b$ . Assim, como essa segunda coordenada nunca é negativa e sempre diminui, eventualmente chega a zero.

O que acontece quando o monovariante sempre *aumenta*?

**Exemplo 8.** Duas mil pessoas estão hospedadas em um hotel com 123 quartos. A cada segundo, uma pessoa sai de um quarto para outro com pelo menos a mesma quantidade de pessoas, a não ser que todas as pessoas estejam em um quarto só. Prove que eventualmente todas as pessoas estarão em um quarto só.

*Solução.* Note que, intuitivamente, a cada passo, a *concentração de pessoas nos quartos aumenta*. É claro que isso não é uma solução, mas dá boas ideias.

Como medir essa concentração? O primeiro candidato é, naturalmente, a quantidade de pessoas no quarto. Mas a soma dessas quantidades é simplesmente o total de pessoas, que é 2000. É um invariante, mas não é muito útil.

O que fazer então? Tentamos *amplificar* essa concentração. Uma maneira é considerar a *soma dos quadrados*  $S$  das quantidades de pessoas em cada quarto. Quando ocorre uma mudança de um quarto com  $a$  pessoas para um quarto de  $b \geq a$  pessoas,  $S$  muda de  $a^2 + b^2$  para  $(a-1)^2 + (b+1)^2 = a^2 + b^2 + 2(b-a) + 2 > a^2 + b^2$ , já que  $b-a \geq 0$ . Note então que  $S$  é um monovariante crescente, e sempre cresce. Mas isso não prova nada, pois  $S$  poderia ir a infinito, certo?

Errado! Esse monovariante funciona porque o número de maneiras de distribuir 2000 pessoas em 123 quartos é *finita*. Assim, a quantidade de estados possíveis é finita, e o monovariante não pode crescer para sempre. Ou seja, a quantidade de passos é finita. Mas o processo só termina quando todos estão no mesmo quarto, e o problema está resolvido.

*Comentários.* • O fato de a quantidade de estados ser finita é crucial para o problema. De fato, se tivéssemos dois quartos com infinitas pessoas, nunca ocorreria de todos ficarem no mesmo quarto (verifique!). Note que  $S$  nem chega a fazer sentido nesse caso.

- Há outros monovariantes que funcionam nesse problema. Sendo  $a_1, a_2, \dots, a_{123}$  as quantidades de pessoas em cada quarto, dois outros monovariantes que funcionam são  $\sum_{i=1}^{123} \frac{1}{a_i+1}$  e  $\sum_{i=1}^{123} 2^{a_i}$ . Fica para você verificar por que esses monovariantes funcionam.

Nem sempre considerar um monovariante é suficiente. Muitas vezes é bom considerar um *time de monovariantes*.

**Exemplo 9.** Duas mil pessoas estão hospedadas em um hotel com 123 quartos. A cada segundo, uma ou mais pessoas, todas originalmente do mesmo quarto saem dele e cada um escolhe um quarto para ficar; pelo menos um deles vai para um quarto com pelo menos a quantidade de pessoas que o quarto tinha originalmente; as demais podem ir a qualquer outro quarto. Prove que eventualmente todas as pessoas estarão em um quarto só.

*Solução.* Infelizmente, considerar a soma de quadrados não funciona bem. De fato, a mudança  $(5, 6, 0) \rightarrow (3, 7, 1)$  muda de  $5^2 + 6^2 + 0^2 = 61$  para  $3^2 + 7^2 + 1^2 = 59$ . Ou seja, nessa operação ele diminui! Mas as operações no exemplo anterior também podem ser feitas, e já vimos que a soma dos quadrados aumenta nesse caso. Ou seja, a soma dos quadrados não é monovariante (é só um “variante”).

Como consertar isso? Uma maneira é considerar *mais de um monovariante*. Por exemplo, considere os números de pessoas em cada quarto (não fazemos nenhuma operação). Eles formam uma lista não-ordenada de números. Cada mudança altera a lista, mas algo não muda: o *maior número da lista* pode aumentar, mas nunca diminuir. Observe que esse maior número pode estar associado a quartos diferentes, mas o que importa que os máximos das listas nunca diminuam. Como esse máximo não pode crescer para sempre, em algum momento para de crescer, não mudando nunca mais. Após o primeiro número estacionar, o quarto correspondente não irá mais se alterar, e podemos ignorar esse quarto.

A partir desse momento, considere o *maior número entre os 122 números restantes*, ou seja, o *segundo maior número da lista*. Pelo mesmo motivo, ele para de crescer em algum momento. Agora, adivinha o que fazemos? Isso mesmo! Consideramos o *terceiro maior número*, e assim por diante.

Isso quer dizer que os quartos vão parar de se alterar em algum momento. Mas o processo só termina quando todos estiverem no mesmo quarto, e o problema acabou.

Note que nesse último exemplo, consideramos um “time” de 123 monovariantes. Foi extremamente importante considerar como eles interagem. Cuidado com a seguinte

**Solução errada do exemplo 9:** Cada vez que alguém sai de um quarto com  $a$  pessoas para um quarto com  $b \geq a$  pessoas, a quantidade de pessoas em um quarto aumenta. Então as quantidades de pessoas nos quartos ficam aumentando, e como elas não podem crescer para sempre, as pessoas param de mudar de quarto, o que só pode ocorrer se todos estiverem no mesmo quarto.

O problema nessa “solução” é que, enquanto um monovariante cresce, outros *diminuem*, e aí as quantidades poderiam aumentar e diminuir arbitrariamente, e aí os monovariantes não funcionam como deveriam.

*Comentário.* Dentre os monovariantes alternativos apresentados no exemplo anterior,  $\sum_{i=1}^{123} \frac{1}{a_i+1}$  não funciona. Mas  $\sum_{i=1}^{123} 2^{a_i}$  funciona! Verifique isso!

Nem sempre as quantidades são os números a serem considerados no monovariante.

**Exemplo 10.** Uma quantidade finita de sapos está pulando entre 2000 vitórias-régias dispostas em fila. A cada minuto, quaisquer dois sapos que estão sobre a mesma vitória-régia (diferente das extremidades) pulam para as vitórias-régias vizinhas, um em cada direção. Prove que os sapos param de pular em algum momento.

*Solução.* Sendo  $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$  as quantidades de sapos, parece tentador considerar um monovariante como o anterior: a soma dos quadrados. Mas uma mudança é do tipo  $(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1} + 1, a_i - 2, a_{i+1} + 1)$  e a alteração muda  $a_{i-1}^2 + a_i^2 + a_{i+1}^2$  para  $(a_{i-1} + 1)^2 + (a_i - 2)^2 + (a_{i+1} + 1)^2 = a_{i-1}^2 + a_i^2 + a_{i+1}^2 + 2(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} + 3)$ , que pode aumentar ou diminuir, dependendo dos valores de  $a_{i-1}, a_i$  e  $a_{i+1}$ . Precisamos de outra conta.

Considerar a *posição* dos sapos é uma ideia melhor. Os sapos na verdade ficam mais *dispersos* do que concentrados. De fato, uma das melhores medidas de dispersão é a soma dos quadrados das *posições*. Um movimento então troca dois sapos na posição  $i$  por um sapo na posição  $i - 1$  e outro na posição  $i + 1$ , e a soma é mudada de  $2i^2$  para  $(i - 1)^2 + (i + 1)^2 = 2i^2 + 2$ , ou seja, sempre aumenta em 2. Como o número de distribuições de sapos é finita, o monovariante não pode aumentar para sempre, e os sapos param de pular.

O problema considera algo muito sutil, mas importantíssimo para sua solução: as vitórias-régias estão *em fila*, o que nos permite identificar um *primeiro* e um *último* elemento. E se elas estivessem em círculo?

**Exemplo 11.** 2001 sapos estão pulando entre 2000 vitórias-régias dispostas em círculo. A cada minuto, quaisquer dois sapos que estão sobre a mesma vitória-régia (diferente das extremidades) pulam para as vitórias-régias vizinhas, um em cada direção. Prove que em algum momento existem pelo menos 1001 vitórias-régias ocupadas.

*Solução.* Note que como há 2001 sapos e 2000 vitórias-régias, sempre haverá pelo menos uma vitória-régia com pelo menos dois sapos. Conclusão: *os sapos nunca param de pular*.

Parece estranho usar um monovariante em um problema em que o processo não termina, mas é o que faremos. Primeiro, provaremos que cada vitória-régia é visitada pelo menos uma vez. De fato, se existe uma vitória-régia que nunca é visitada, então podemos descartá-la e considerar a *fila* que é formada com as demais vitórias-régias, e caímos no exemplo anterior. Mas isso quer dizer que os sapos param de pular, o que já vimos que não acontece.

Agora, divida as 2000 vitórias-régias em 1000 pares de vitórias-régias vizinhas. Considere um par  $A, B$  de vitórias-régias vizinhas: sabemos que ambas serão visitadas por algum sapo em algum momento. Mas se algum sapo entra em uma das vitórias-régias, sempre vai haver um sapo em  $A$  ou  $B$ . De fato, se a quantidade de sapos em  $A$  diminui, a quantidade de sapos em  $B$  aumenta (verifique!), e nunca vamos ver 0 sapo em  $A$  e 0 sapo em  $B$ .

Com isso, conseguimos pelo menos 1000 vitórias-régias ocupadas. Como garantir 1001? O único caso em que há exatamente 1000 vitórias-régias ocupadas é os sapos estarem em vitórias-régias alternadas (note que se esse não for o caso, duas vitórias-régias ficam vazias, o já vimos que não pode ocorrer). Mas é só executar um movimento que conseguimos 1001 vitórias-régias ocupadas.

*Comentário.* É possível adaptar a solução acima para 2000 sapos. Mas como nem sempre os sapos ficam pulando para sempre (por quê?), é preciso fazer mudanças.

É claro que podemos aplicar a ideia de monovariantes em problemas de tabuleiro.

**Exemplo 12.** Imagine um tabuleiro de xadrez infinito dividido em dois por uma de suas retas horizontais. Devemos agora pôr uma quantidade finita de peças na parte de baixo do tabuleiro e, movendo-as segundo as regras do *Resta um*, trazer pelo menos uma delas até a  $n$ -ésima linha acima da linha divisória. Determine os valores de  $n$  para o qual isto é possível.

*Solução.* Você pode verificar que é possível para  $n \leq 4$ . Mas para  $n \geq 5$  não é possível. Precisamos só provar que não é possível chegar à quinta linha. Para isso, suponha por absurdo que seja possível e considere uma casa ocupada por uma peça nessa linha. Associe a essa casa o número 1, às casas vizinhas por aresta o número  $x > 0$ , às vizinhas dessas vizinhas o número

$x^2$ , e assim por diante:

|  |       |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|  |       |       |       |       |       |       |       |
|  | $x^3$ | $x^2$ | $x$   | 1     | $x$   | $x^2$ | $x^3$ |
|  | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x$   | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ |
|  | $x^5$ | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ |
|  | $x^6$ | $x^5$ | $x^4$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ |
|  | $x^7$ | $x^6$ | $x^5$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ | $x^7$ |
|  | $x^8$ | $x^7$ | $x^6$ | $x^5$ | $x^6$ | $x^7$ | $x^8$ |
|  | $x^9$ | $x^8$ | $x^7$ | $x^6$ | $x^7$ | $x^8$ | $x^9$ |
|  |       |       |       |       |       |       |       |

Vamos, novamente, considerar a função potencial, ou seja, seja  $S$  a soma das casinhas que têm uma peça. Considere os movimentos do Resta-um. Eles são do tipo:

- Saem  $x^{k-1}, x^k$  e entra  $x^{k+1}$  (desce ou fica mais longe da coluna com o 1);
- Saem  $x^{k+1}, x^k$  e entra  $x^{k-1}$  (sobe ou fica mais perto da coluna com o 1);
- Saem  $x^{k+1}, x^k$  e entra  $x^{k+1}$  (movimentos envolvendo a coluna com o 1 e suas duas vizinhas);

Note que no terceiro movimento trocamos  $x^{k+1} + x^k$  por  $x^{k+1}$ , ou seja,  $S$  diminui. Vamos fazer com que  $S$  nunca cresça então. Ou seja, vamos escolher  $x$  tal que

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^{k-1} + x^k \geq x^{k+1} \\ x^{k+1} + x^k \geq x^{k-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 1 \leq 0 \\ x^2 + x - 1 \geq 0 \end{cases} \iff \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

O valor final de  $S$  deve ser pelo menos 1. Todavia, o valor inicial de  $S$  é menor do que a soma dos números de todas as casas abaixo da linha horizontal, que é, escolhendo  $x < 1$ ,

$$\begin{aligned} & x^5(1+x+x^2+\dots) + 2x^6(1+x+x^2+\dots) + 2x^7(1+x+x^2+\dots) + \dots \\ &= (x^5 + 2x^6 + 2x^7 + \dots) \cdot \frac{1}{1-x} = \left( \frac{2x^5}{1-x} - x^5 \right) \frac{1}{1-x} = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Para facilitar as contas, escolha  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Então  $x^2+x=1 \iff 1-x=x^2 \iff 1+x = \frac{1}{x}$  e a soma é menor do que

$$\frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{x^5 \cdot 1/x}{(x^2)^2} = 1.$$

Mas se o valor inicial de  $S$  é menor do que 1 e  $S$  nunca aumenta, qualquer sequência de movimentos leva a um valor menor do que 1 e portanto não é possível que  $S$  seja pelo menos 1 e, portanto, não é possível chegar à quinta linha.

*Comentário.*  $x$  só poderia ser  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . De fato, o monovariante  $S$  funciona se, e somente se,  $\frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2} \leq 1 \iff (x^2+x-1)(x^4+x^2-x+1) \leq 0$ . Como  $x^2-x+1 > 0$  para todo  $x$  real,  $x^4+x^2-x+1 > 0$  para todo  $x$  real e bastava...  $x^2+x-1 \leq 0$ . Mas  $x^2+x-1 \geq 0$  e  $x > 0$ , ou seja,  $x^2+x-1=0$  e  $x > 0$ , que equivale a  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

## 2.1 Problemas

15. (Cone Sul) Em uma lousa estão escritos os números inteiros positivos de 1 até  $4^n$  inclusive. Em cada momento, Pedro apaga dois números da lousa,  $a$  e  $b$ , e escreve o número  $\frac{ab}{\sqrt{2a^2+2b^2}}$ . Pedro repete o procedimento até que sobre apenas um número. Demonstrar que este número será menor que  $\frac{1}{n}$ , sem importar quais números Pedro escolha em cada momento.

16. (Cone Sul) Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  inteiros positivos. Definem-se três sequências tais que:

- $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ,  $c_1 = c$
- $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{a_n b_n} \rfloor$ ,  $b_{n+1} = \lfloor \sqrt{b_n c_n} \rfloor$ ,  $c_{n+1} = \lfloor \sqrt{c_n a_n} \rfloor$  para todo  $n \geq 1$

- (a) Demonstrar que, para quaisquer  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , existe um inteiro positivo  $N$  tal que  $a_N = b_N = c_N$ .
- (b) Achar o menor inteiro positivo  $N$  tal que  $a_N = b_N = c_N$  para alguma escolha de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tais que  $a \geq 2$  e  $b + c = 2a - 1$ .

**Nota:** Denotamos por  $\lfloor x \rfloor$  a *parte inteira* do número real  $x$ , por exemplo  $\lfloor 2,8 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 5 \rfloor = 5$ .

17. (OBM) É dada uma equação do segundo grau  $x^2 + ax + b = 0$  com raízes inteiras  $a_1$  e  $b_1$ . Consideramos a equação do segundo grau  $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$ . Se a equação  $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$  tem raízes inteiras  $a_2$  e  $b_2$ , consideramos a equação  $x^2 + a_2 x + b_2 = 0$ . Se a equação  $x^2 + a_2 x + b_2 = 0$  tem raízes inteiras  $a_3$  e  $b_3$ , consideramos a equação  $x^2 + a_3 x + b_3 = 0$ . E assim por diante. Se encontrarmos uma equação com  $\Delta < 0$  ou com raízes que não sejam números inteiros, encerramos o processo.

Exemplos:

- $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$  e não podemos continuar, pois as raízes de  $x^2 - x - 1 = 0$  são  $(1 + \sqrt{5})/2$  e  $(1 - \sqrt{5})/2$ , números não inteiros.
- $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + x + 2 = 0$  e não podemos continuar, pois  $\Delta = -7 < 0$ .
- $x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow \dots$  neste caso podemos continuar o processo indefinidamente (isto é, em nenhuma equação obtida ocorre  $\Delta < 0$  ou raízes não inteiras).

- (a) Determine uma outra equação que, como  $x^2 = 0$ , nos permita continuar o processo indefinidamente.
- (b) Determine todas as equações do segundo grau completas a partir das quais possamos continuar o processo indefinidamente.

18. 1000 homens e 1000 mulheres estão em um hotel com 123 quartos. As pessoas mudam de quarto de acordo com as seguintes regras:

- um homem se muda de um quarto com mais homens que mulheres para um quarto com mais mulheres do que homens (todas as contagens são feitas antes da mudança) ou
- uma mulher se muda de um quarto com mais mulheres que homens para um quarto com mais homens do que mulheres (todas as contagens são feitas antes da mudança)

Prove que eventualmente as pessoas vão parar de mudar de quarto.

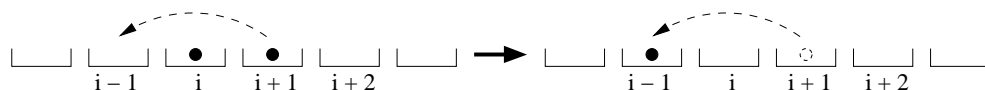
19. 1000 homens e 1000 mulheres estão em um hotel com 123 quartos. As pessoas mudam de quarto de acordo com as seguintes regras:

- um homem se muda de um quarto com mais homens que mulheres para um quarto com mais mulheres do que homens (todas as contagens são feitas antes da mudança) ou
- uma mulher se muda de um quarto com mais mulheres que homens para um quarto com pelo menos a mesma quantidade de pessoas (todas as contagens são feitas antes da mudança)

Prove que eventualmente as pessoas vão parar de mudar de quarto.

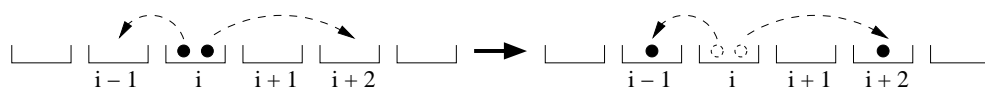
20. (OBM) Temos uma fileira longa de copos e  $n$  pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

Movimento tipo A



Se há pelo menos uma pedra no copo  $i$  e pelo menos uma no copo  $i + 1$  podemos fazer uma pedra que está no copo  $i + 1$  pular para o copo  $i - 1$  eliminando uma pedra do copo  $i$ .

Movimento tipo B



Se há pelo menos duas pedras no copo  $i$  podemos pular uma para o copo  $i + 2$  e uma outra para o copo  $i - 1$ .

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegaremos a uma configuração a partir da qual não é mais possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.

21. Doze anões vivem em uma floresta e cada um deles tem uma casa que é pintada de vermelho ou azul. No  $i$ -ésimo mês de cada ano, o  $i$ -ésimo anão visita todos os seus amigos e se encontra a maioria deles vivendo em casas de cor diferente da sua própria, ele decide juntar-se a eles e muda a cor de sua casa. Mostre que, mais cedo ou mais tarde, nenhum anão precisará mudar a cor de sua casa. (As amizades são mútuas e não mudam).
22. (IMO) É atribuído um inteiro a cada um dos vértices de um pentágono regular, de tal forma que a soma dos cinco números seja positiva. Se três vértices consecutivos recebem os números  $x, y, z$ , respectivamente, e  $y < 0$  então a seguinte operação é permitida: os números  $x, y, z$  são trocados por  $x + y, -y, z + y$ , respectivamente. Tal operação é repetida enquanto houver um número negativo entre os cinco atribuídos. Determine se este processo necessariamente se encerra após um número finito de aplicações de tal operação.
23. (Cone Sul) *Recortar* um polígono convexo de  $n$  lados significa escolher um par de lados consecutivos  $AB, BC$  do polígono e substituí-los por três segmentos  $AM, MN$  e  $NC$ , sendo  $M$  o ponto médio de  $AB$  e  $N$  o ponto médio de  $BC$ . Em outras palavras, corta-se o triângulo  $MBN$  e obtém-se um polígono convexo de  $n + 1$  lados.

Seja  $\mathcal{P}_6$  um hexágono regular de área 1. Recorta-se  $\mathcal{P}_6$  e obtém-se o polígono  $\mathcal{P}_7$ . Então recorta-se  $\mathcal{P}_7$ , de uma das sete maneiras possíveis, obtendo-se o polígono  $\mathcal{P}_8$ , e assim sucessivamente. Prove que, independentemente de como sejam feitos os recortes, a área de  $\mathcal{P}_n$  é sempre maior do que  $2/3$ .

### 3 Bibliografia

1. T. Andreescu e Z. Feng, *102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser 2003.
2. C. Chuan-Chong e K. Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific 1992.
3. C. C. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill 1968.
4. Z. Stankova, T. Rike (editores), *A Decade of the Berkeley Math Circle; The American Experience, Volume I*, MRSI/AMS 2008.