Problemas olímpicos relacionados com problemas de pesquisa e vice-versa

Carlos Shine

1 Diferenças e semelhanças entre matemática de pesquisa e matemática olímpica

Como Timothy Gowers e Stanislav Smirnov afirmaram em palestras durante a IMO 2009 (disponíveis no livro *An Invitation to Mathematics: from Competitions to Research*, editados por Dierk Schleicher e Malte Lackmann – o livro todo vale a pena e é relevante para o nosso tema!), matemática de pesquisa e matemática olímpica têm várias diferenças marcantes, algumas das quais listo a seguir:

- Alguns problemas de pesquisa com enunciados bonitos têm soluções feias (por exemplo, quatro cores e Ramsey $R(4,5)$).
- Maioria dos problemas de pesquisa demoram meses ou anos para serem resolvidos.
- Alguns problemas de pesquisa são, no momento, intratáveis, e muitas vezes é importante saber quando desistir de algum problema. Por outro lado, uma vantagem em pesquisa é que podemos modificar o problema, o que não pode ser feito em olimpíada.
- Muitos das questões que aparecem na cabeça de um pesquisador são triviais ou mal formuladas, e é preciso de sorte para encontrar algum problema que seja interessante. É claro que podemos modificar algum problema não interessante e torná-lo interessante.
- Um problema de pesquisa pode mudar de inatingível para realístico. Alguém pode ter inventado alguma ideia nova que ajude! (Isto é, matemática progride com o tempo!)
- Muitas vezes a solução de um problema de pesquisa consiste em modificar algum argumento que já existiu.

Em compensação, existem algumas semelhanças também:

- Alguns problemas de olimpíada podem gerar problemas interessantes de pesquisa.
- Alguns problemas de olimpíada vieram de problemas de pesquisa.
- Alguns problemas de pesquisa têm relevância e demonstrações simples.
- Matemáticos profissionais também gostam de demonstrações bonitas.
- Demonstrações de um mesmo teorema ficam mais simples com o passar do tempo. Por isso procurar a solução mais simples é uma boa prática em qualquer modalidade de matemática!

2 Instruções sobre os problemas e exercícios

Nas próximas seções, aparecerão problemas, exercícios e teoremas. Você deve pensar nos exercícios (de fato, alguns dos exercícios são “resolva o problema” ou “prove o teorema”).

3 Problemas olímpicos que têm a ver com problemas de pesquisa

3.1 A desigualdade triangular de Ruzsa

Em teoria aditiva dos números, usamos a notação $A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$ e $A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

O seguinte problema é exatamente a desigualdade triangular de Rusza, que apareceu como um problema no banco da Romanian Masters de 2010.

Problema 1 (Desigualdade triangular de Rusza)**.** *Prove que, para conjuntos finitos U, V, W,*

$$|V - W| \le \frac{|U + V||U + W|}{|U|}.$$

Por que o nome "desigualdade triangular"? Definindo

$$d(A, B) = \log \frac{|A - B|}{\sqrt{|A|}\sqrt{|B|}},$$

temos

- $d(A, B) \ge 0$
- $d(A, B) = d(B, A)$;
- $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$.

Exercício 1. *Prove que $|A + B| \ge |A| + |B| - 1$ e conclua que $d(A, B) \ge 0$.*

O terceiro item é equivalente à desigualdade triangular de Rusza trocando U por $-U = \{-u; u \in U\}$: sendo $|-U| = |U|$,

$$|V - W| \le \frac{|V - U||W - U|}{|-U|} \iff \frac{|V - W|}{\sqrt{|V|}\sqrt{|W|}} \le \frac{|V - U|}{\sqrt{|V|}\sqrt{|U|}} \frac{|W - U|}{\sqrt{|W|}\sqrt{|U|}}$$
$$\iff \log \frac{|V - W|}{\sqrt{|V|}\sqrt{|W|}} \le \log \frac{|V - U|}{\sqrt{|V|}\sqrt{|U|}} + \log \frac{|W - U|}{\sqrt{|W|}\sqrt{|U|}}.$$

Exercício 2. *Explique por que d não é uma métrica (dica: $d(A, A)$).*

Exercício 3. *Resolva o problema. (Dica: tente encontrar uma injeção entre $(V - W) \times U$ e $(U + V) \times (U + W)$.)*

Exercício 4. *Prove que se $|A + A| \le K|A|$ então $|A - A| \le K^2|A|$.*

3.2 Diferenças proibidas

O problema 4 da OBM 2016 é

Problema 2. *Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2016 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 2 ou 6?*

Exercício 5. *Mostre que o algoritmo guloso (escolher sempre o menor número que podemos colocar no conjunto) não funciona se trocarmos 1, 2, 6 por 1, 4, 5.*

Acontece (sem ciência do autor do problema!) que o problema de diferenças proibidas aparece em pesquisa! Seja D o conjunto de diferenças proibidas (na OBM, $D = \{1, 2, 6\}$); estamos interessados em saber qual a máxima fração $\mu(D)$ dos números de 1 a n que podemos escolher sem que a diferença entre quaisquer dois escolhidos esteja em D. De fato, o problema está completamente resolvido se $|D| \le 2$. Mesmo para $|D| = 3$, não se sabe a resposta em geral, e mesmo o caso em que $|D| = 3$ e $\min D = 1$ não está completamente resolvido.

O problema tem a ver com um problema em aberto conhecido como "problema do corredor solitário" (o nome veio em 1998; a conjectura, em 1967):

Conjectura 1 (Problema do Corredor Solitário)**.** *Suponha que k corredores partam do mesmo ponto de uma pista circular com comprimento unitário. As velocidades dos corredores são todas distintas. Um corredor é* solitário *se a distância dele na pista a cada um dos outros corredores é pelo menos $1/k$.*

Então cada um dos k corredores está solitário em algum momento.

Para ver a conexão, considere o caso particular em que as velocidades são mensuráveis, ou seja, a razão entre duas velocidades é sempre racional. Podemos também fixar qualquer um dos corredores para ficar solitário e, usando velocidade relativa, supor que ele está parado. Então, dado um conjunto D de velocidades relativas, defina $\|x\| = \min\{\{x\}, 1-\{x\}\}$ como a distância do real x ao inteiro mais próximo, e

$$\kappa(D) = \sup_{x \in (0,1)} \min_{d \in D} \|xd\|.$$

O caso particular da conjectura é equivalente a dizer que $\kappa(D) \ge \frac{1}{|D|+1}$ para todo D finito. Foi demonstrado em 1975 que $\mu(D) \ge \kappa(D)$.

Exercício 6. *Sejam c e m inteiros positivos com $\operatorname{mdc}(c, m) = 1$. Defina*

$$d = \min_{x \in D} |cd|_m,$$

em que $|x|_m$ é a menor distância do inteiro x a um múltiplo de m. Prove que $\mu(D) \ge \frac{d}{m}$.

Exercício 7. *Prove que $\mu(D) = \mu(kD)$ para todo k inteiro positivo.*

Exercício 8. *Prove que se $|D| = 1$ então $\mu(D) = \frac{1}{2}$.*

Exercício 9. *Prove que se $D = \{a, b\}$,*

$$\mu(D) = \frac{\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor}{a+b}.$$

(De fato, $\kappa(D) = \mu(D)$ nesse caso.)

3.3 Desigualdades e. . . Estatística?

Um problema da segunda fase da Polônia de 2017 é

Problema 3. *Sejam $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2n-1}$ reais com média aritmética A. Prove que*

$$2\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \ge \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Várias soluções podem aparecer para esse problema, mas ele tem uma interpretação bastante interessante. Considere as seguintes definições da estatística:

- A *variância* de um conjunto de dados $x_1, x_2, \ldots, x_k$ é

  $$\sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2,$$

  em que μ é a média aritmética de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. A variância mede o quanto os dados estão "espalhados" ou distantes da média.

- O *desvio padrão* de um conjunto de dados $x_1, x_2, \ldots, x_k$ é a raiz quadrada da variância:
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$
- A *mediana* de um conjunto de dados $x_1, x_2, \ldots, x_k$ é $x_{(k+1)/2}$ se k é ímpar e $\frac{1}{2}(x_{k/2} + x_{k/2+1})$ se k é par (sim, mediana, de certo modo, é o "número do meio").
- Parece bobo, mas vai ser útil mais tarde: o *valor esperado de uma variável X* $E(X)$ é a média de X. Por exemplo, a variância é $E((X-\mu)^2)$ e a desigualdade de Jensen diz que se uma função f é convexa então $E(f(x)) \geq f(E(X))$. É fácil ver, por exemplo, que $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ para a, b constantes.

Exercício 10. *Prove que a média minimiza a soma*
$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x)^2,$$
ou seja, faz sentido usar a média como referência no cálculo do desvio padrão.

Exercício 11. *Prove que a mediana minimiza a soma*
$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - x|,$$
ou seja, faz sentido usar a mediana M como referência no cálculo do desvio médio*, que é*
$$DM = \frac{1}{k} g(M) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |x_i - M| = E(|x_i - M|).$$

Com isso, o problema se reduz a um teorema conhecido da Estatística:

Teorema 1. *Seja X uma variável aleatória, ou seja, uma função que associa os possíveis valores de um experimento a números reais. Seja μ a sua média (ou seja, $\mu = E(X)$), M sua mediana e σ seu desvio padrão. Então*
$$|\mu - M| \leq \sigma.$$

Em outras palavras, a mediana nunca está muito longe da média.

Demonstração. Considere a variável $Y = |X - M|$. Então, como $f(x) = |x|$ é convexa, pela desigualdade de Jensen
$$E(|X - M|) \geq |E(X - M)| = |E(X) - M| = |\mu - M|.$$

Agora, a função $g(x) = \sqrt{x}$ é côncava, a minimalidade do desvio médio com relação à mediana e a desigualdade de Jensen nos dá
$$E(|X - M|) \leq E(|X - \mu|) = E(\sqrt{(X-\mu)^2}) \leq \sqrt{E((X-\mu)^2)} = \sigma.$$

Juntando as duas desigualdades obtemos o resultado. $\square$

Exercício 12. *Resolva o problema, fazendo a redução ao teorema e demonstrando o teorema na situação particular do problema.*

Exercício 13. *A* amplitude *de um conjunto de dados $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ é $A = x_n - x_1$. Sendo σ o desvio padrão desse conjunto, prove que*
$$\sigma \leq \frac{A}{2},$$
que é equivalente a
$$2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \leq n(x_n - x_1)^2,$$
em que μ é a média aritmética dos n números.

3.4 Vasos e pessoas

O problema 6 da Ibero 2010 é

Problema 4. *Ao redor de uma mesa circular sentam-se 12 pessoas e sobre a mesa há 28 vasos de flores. Duas pessoas podem ver-se uma à outra se, e somente se, não há nenhum vaso alinhado com elas. Provar que existem pelo menos duas pessoas que podem ver-se.*

Vamos à solução, que tem uma ideia inusitada, mas bem bacana.

Solução. Associe a cada par de pessoas um peso, que é a menor quantidade de pessoas em cada um dos arcos que as ligam, mais 1. A soma total desses pesos é

$$12 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{1}{2} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 28{,}4.$$

Agora considere um vaso sobre um segmento AB de peso $1/(m+1)$. Então há m pessoas de um dos lados do segmento, e esse vaso bloqueia no máximo m outros pares de pessoas. Assim, a soma dos pesos dos pares bloqueados por esse vaso é no máximo $(m+1) \cdot \frac{1}{m+1} = 1$. Como há 28 vasos, a soma dos pesos dos pares bloquedos pelos vasos é menor ou igual a $28 < 28{,}4$, e portanto nem todos os pares foram bloqueados.

É claro que os valores dos pesos aparecem só depois de pensar no argumento do parágrafo anterior. □

Esse problema, em seu caso geral, é um problema de pesquisa. Sendo $b(P)$ o número mínimo de vasos para bloquear pessoas no conjunto P de pontos, se P é convexo e $|P| = n$, o mesmo argumento prova que

$$b(P) \ge \begin{cases} n \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} & \text{if } n = 2m+1 \\ 1 + n \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} & \text{if } n = 2m \end{cases}$$

Isso mostra que essencialmente $b(P) \ge n \ln(n/2)$, que é mais do que linear. Mas e se P não for necessariamente convexo? Definindo $b(n)$ como o menor valor de $b(P)$ sobre todo P com $|P| = n$ e sem três pontos colineares, não se sabe até hoje um limitante inferior melhor do que $(25/8 - o(1))n$, em que $o(1)$ é uma função que tende a 0 quando n tende a infinito. O que temos é

$$\left(\frac{25}{8} - o(1)\right) n \le b(n) \le nc^{\sqrt{\log n}},$$

em que c é uma constante. Conjectura-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{b(n)}{n} = \infty$, mas isso ainda não foi provado até agora (final de 2018).

Algo interessante é que, no meio do caminho Bjorn Poonen e Michael Rubinstein provaram que, no caso em que P são os vértices de um n-ágono regular, no máximo 7 diagonais concorrem (a demonstração dá um certo trabalho); então, nesse caso, $b(P) \ge cn^2$ para alguma constante c.

Exercício 14. *Prove que $b(n) \ge 2n - 3$. (Dica: considere uma triangulação de P.)*

4 Problemas de pesquisa que poderiam ser olímpicos

4.1 Teoria aditiva dos números

Em teoria aditiva dos números, usamos a notação $A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$, e $kA = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{k \text{ vezes}}$. A seguinte igualdade confronta $A + A$ e $A - A$ de um modo interessante:

Teorema 2 (Desigualdade de Plünnecke-Ruzsa)**.** *Prove que se $|A + A| \le C|A|$ então $|kA - \ell A| \le C^{k+\ell}|A|$.*

A primeira demonstração desse teorema era bastante complicada e usava ferramentas da teoria dos grafos. Em 2011, George Petridis, um estudante de Timothy Gowers, conseguiu uma demonstração bem simples usando só os fundamentos da área.

Demonstração. Começamos com um lema:

Lema 1. Sejam A e B dois conjuntos tais que $|A+B| \le K|A|$. Escolha $\emptyset \ne X \subseteq A$ tal que $|X+A|/|X|$ é mínimo e igual a K_0. Então

$$|A+B+X| \le K_0|B+X|.$$

Vamos provar o lema. Primeiro note que $|X+A| = K_0|X|$ e $|Z+A| \ge K_0|Z|$ para todo $Z \subset A$. Além disso, $K_0 \le K$.

A demonstração do lema é por indução em $|B|$. Se $|B| = 1$, ou seja, $B = \{b\}$, $|A+X+b| = |A+X| \le K_0|X| = |X+b|$.

A indução "inocente" trocando B por $B' = B \cup \{b\}$ não funciona: de fato, $A+B'+X = (A+B+X) \cup (A+b+X)$, e $|A+B'+X| \le |A+B+X| + |A+X| \le K_0(|B+X|+|X|)$, e não dá para saber se $|B+X|+|X| \le |X+B'|$; de fato, isso só acontece se $X+b$ (veja que $|X+b| = |X|$) e $|X+B|$ são disjuntos; em outras palavras, a desigualdade inverteu!

Para consertar esse argumento, tiramos algumas repetições: escrevemos

$$A+B'+X = (A+B+X) \cup \big((A+b+X) \setminus (A+b+Z)\big),$$

em que Z é formado pelos $x \in X$ tais que $A+b+x \subset A+B+X$ (ou seja, tiro os x's que não colaboram). Aí temos

$$|A+B'+X| \le |A+B+X|+|A+b+X|-|A+b+Z| = |A+B+X|+|A+X|-|A+Z| \le K_0(|B+X|+|X|-|Z|).$$

Para acabar, falta provar que $|B+X|+|X|-|Z| \le |B'+X|$. Mas $B'+X = (B+X)\cup((b+X)\setminus(b+W))$, em que W é o conjunto dos $x \in X$ com $b+x \in B+X$. Como tiramos todas as combinações de $x \in X$ e B que não contribuem, a união é disjunta. Assim, $|B'+X| = |B+X|+|X|-|W|$, e como $b+x \in B+X \implies A+b+x \subset A+B+X$, $W \in Z$, $|W| \le |Z|$ e $|B'+X| \ge |B+X|+|X|-|Z|$, como queríamos demonstrar. □

Feito isso, o problema sai rapidamente: usando $B = (k-1)A$ e escolhendo X como no lema temos

$$|kA+X| = |A+(k-1)A+X| \le K_0|(k-1)A+X|,$$

e iterando obtemos $|kA+X| \le K_0^k|X|$.

Analogamente, temos $|\ell A+X| \le K_0^\ell|X|$.

Para terminar, usamos a desigualdade triangular de Rusza:

$$|kA-\ell A| \le \frac{|kA+X||\ell A+X|}{|X|} \le K_0^{k+\ell}|X| \le K^{k+\ell}|A|. \quad \square$$

4.2 Desigualdades e... Estatística? Parte 2

Como anteriormente, algumas desigualdades podem ser provadas com Estatística. Estatísticos também se interessam nos chamados *momentos*, que são $E(X^k)$ (esse é o k-ésimo momento; alguns preferem centralizar e calcular $E((X-\mu)^k)$). Os quatro primeiros momentos são particularmente relevantes, pois medem centro (média, primeiro momento), dispersão (variância, segundo momento), assimetria (terceiro momento) e se há muitos pontos longe da média (curtose, quarto momento).

Defina $m_k = E(X^k)$; no caso em que temos um conjunto de dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $m_k = \frac{1}{n}(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k)$.

Teorema 3. *Defina $m_k = E(X^k)$ e suponha que $m_1 = 0$. Então*

$$m_3 \le \sqrt{m_4m_2 - m_2^3}$$

e, consequentemente,

$$m_3 \le \left(\frac{4}{27}\right)^{1/4} m_4^{3/4}.$$

Tomando conjuntos finitos, a última desigualdade nos diz que se a soma dos n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é zero, então

$$\left(\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{n}\right)^4 \le \frac{4}{27}\left(\frac{x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4}{n}\right)^3,$$

que é uma melhoria sobre a desigualdade das médias potenciais no caso em que a soma é nula (de fato, dá para provar o fato mesmo se $m_1 < 0$).

Vamos provar esse teorema com uma série de exercícios.

Demonstração.

Exercício 15. *Defina a* covariância *entre duas variáveis* X *e* Y *como* $\operatorname{cov}(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$. *Denotando a variância de uma variável por* $\operatorname{var}(X)$, *prove que*

$$(\operatorname{cov}(X,Y))^2 \le \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y).$$

Exercício 16. *Prove que se* $m_1 = 0$ *então*

$$m_3 \le \sqrt{m_4 m_2 - m_2^3}.$$

Exercício 17. *Prove que se* $m_1 = 0$ *então*

$$m_3 \le \left(\frac{4}{27}\right)^{1/4} m_4^{3/4}.$$

Exercício 18. *Encontre os casos de igualdade para a última desigualdade.*

4.3 Ramsey em torneios

Antes de partir para o problema, considere o seguinte teorema. Dado um grafo simples, uma *orientação* é tornar cada aresta do grafo direcionada. O *número cromático* de um grafo é a menor quantidade de cores que devemos usar para pintar os vértices de modo que não haja vértices da mesma cor diretamente ligadas por uma aresta.

Teorema 4 (Gallai–Hasse–Roy–Vitaver)**.** *Toda orientação de um grafo com número cromático* k *contém um caminho direcionado com* k *vértices.*

Demonstração. Exercício. Na verdade pode-se provar que k é o melhor valor possível, numerando as cores e orientando o grafo sempre da menor cor para a maior cor. Nessa orientação o tamanho máximo do caminho é o número cromático k.

Exercício 19. *Prove o teorema de Gallai–Hasse–Roy–Vitaver. (Dica: considere uma orientação do grafo* G*, e tome o subgrafo* H *da orientação de* G *que é maximal acíclico – em que ciclos são considerados orientados; pinte cada vértice com o tamanho do maior caminho orientado que termina nesse vértice. Por que essa pintura funciona?)*

Esse teorema é um aquecimento para o seguinte teorema, ainda a ser publicado por Po-Shen Loh:

Teorema 5. *Considere um torneio (grafo completo com alguma orientação) com* n *vértices. Pinte as arestas de* r *cores. Então esse torneio contém um caminho orientado monocromático com pelo menos* $n^{1/r}$ *vértices. Esse resultado é o melhor possível: existem exemplos em que o caminho máximo tem* $\lceil n^{1/r} \rceil$ *vértices.*

Exercício 20. *Sejam* $G_1 = (V, A_1)$ *e* $G_2 = (V, A_2)$ *dois grafos com os mesmos vértices e conjuntos de arestas* A_1 *e* A_2 *disjuntos (ou seja,* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$*), e considere o grafo* $G = (V, A_1 \cup A_2)$ *com os mesmos vértices e a união dos dois conjuntos de arestas.*

Sendo $\chi(H)$ *o número cromático do grafo* H*, prove que* $\chi(G) \le \chi(G_1)\chi(G_2)$.

Exercício 21. *Prove a primeira parte do teorema, ou seja, que existe o caminho com pelo menos* $n^{1/r}$ *vértices.*

Exercício 22. *Encontre infinitos exemplos em que o caminho máximo tem* $\lceil n^{1/r} \rceil$ *vértices. (Dica: faça* $n = r^k$*, rotule os vértices com* r*-uplas* $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ *com* $x_i \in \{1, 2, \dots, k\}$*, e pense em alguma ordenação para pintar e direcionar arestas.)*

4.4 Método probabilístico e aplicações de crossing number

O método probabilístico foi popularizado por Paul Erdős no século XX, e tem sido uma ferramenta bastante poderosa para simplificar demonstrações.

Uma aplicação que apareceu nos anos 1990, em conversas entre Bernard Chazelle, Micha Sharir e Emo Welzl, tem a ver com o *crossing number* de um grafo, que é a quantidade mínima de cruzamentos de arestas ao desenharmos o grafo no plano (não pensaremos em mais de duas arestas concorrentes). Sendo G o grafo, denotamos esse número por $\mathrm{cr}(G)$. Em particular, para grafos planares G, $\mathrm{cr}(G) = 0$. Uma estimativa simples usa exatamente $|V| - |A| + |F| = 2$ e o fato de que $|A| \geq 3|F|/2$, que mostra que $2|A| \geq 3(2 + |A| - |V|) \iff |A| \leq 3(|V| - 2)$.

Exercício 23. *Prove que* $\mathrm{cr}(G) \geq |A| - 3|V| + 6$.

Essa estimativa é bacana se $|A|$ é pequeno, mas não é muito boa para grafos com muitas arestas. A seguinte estimativa é usada para esse caso.

Lema 2 (Crossing lemma)**.** Sendo $m = |A|$ e $n = |V|$ a quantidade de arestas e vértices do grafo G, se $m \geq 4n$

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

Demonstração. Começamos com um desenho com quantidade mínima de cruzamentos de G, e escolhemos cada vértice com probabilidade p para montar um subgrafo induzido G_p de G (se ambos os vértices de uma aresta são escolhidos, a aresta também é).

Sejam n_p, m_p e X_p as variáveis aleatórias que indicam quantidades de vértices, arestas e o crossing number de G_p. Como $\mathrm{cr}(G_p) - m_p + 3n_p \geq 0$, tirando valores esperados obtemos

$$E(X_p - m_p + 3n_p) \geq 0 \iff E(X_p) - E(m_p) + 3E(n_p) \geq 0.$$

Temos $E(n_p) = pn$ e $E(m_p) = p^2 m$ (uma aresta está presente se, e somente se, ambos seus vértices são escolhidos). Além disso, $E(X_p) = p^4 \,\mathrm{cr}(G)$, pois para um cruzamento entre duas arestas aparecer as duas arestas devem ser escolhidas, o que ocorre com probabilidade $p^2 \cdot p^2 = p^4$. Logo

$$p^4 \,\mathrm{cr}(G) - p^2 m + 3pn \geq 0 \iff \mathrm{cr}(G) \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

Agora, a ideia é escolher p que otimize essa conta. A demonstração original usa $p = \frac{4n}{m}$ (por isso $m \geq 4n$ é necessário: para que $p \leq 1$).

Podemos otimizar um pouco mais se permitirmos um pouco mais de arestas: sendo $x = 1/p$, e $f(x) = mx^2 - 3nx^3$, $f'(x) = 2xm - 9nx^2$, e f' muda de positivo para negativo em $x = 2m/9n$. Nesse caso, f é máximo para esse valor e é $f(x) = \frac{4m^3}{81n^2} - \frac{24nm^3}{729n^3} = \frac{4m^3}{243n^2} = \frac{1}{60{,}75}\frac{m^3}{n^2}$. Devemos ter, porém, $m \geq 9n/2$, um pouco maior.

A constante $4/243$ já foi melhorada para $1/29$, a custo de $m \geq 7n$.

László Székely publicou em 1993 várias aplicações do lema anterior em geometria combinatória. Vamos mostrar algumas delas.

Teorema 6 (Szemerédi e Trotter)**.** *Considere n pontos e m retas no plano. Então o número de incidências entre esses pontos e retas (ou seja, pares (P, r) em que $P \in r$) é no máximo $c((mn)^{2/3} + m + n)$.*

Demonstração. Suponha sem perdas que toda reta passa por pelo menos um dos pontos. Considere o grafo G no plano, cujos vértices são os n pontos, e desenhe uma aresta reta entre dois pontos quando eles forem pontos consecutivos em uma mesma das m retas. Temos $\mathrm{cr}(G) \leq m^2$ (cruzamentos entre retas). A quantidade de pontos em cada reta é igual à quantidade de arestas sobre a reta, mais 1. Assim, a quantidade de incidências i é no máximo $|A| + m$. Agora, fazendo a conta temos ou $|A| \leq 4n \implies i \leq 4n + m$ ou

$$m^2 \geq \mathrm{cr}(G) \geq \frac{k|A|^3}{n^2} \implies |A| \leq k'(mn)^{2/3} \implies i \leq k'(mn)^{2/3} + m.$$

□

Outros dois teoremas obtidos com crossing number são bons exercícios.

Exercício 24 (Szemerédi, Trotter)**.** *Seja* $2 \leq k \leq \sqrt{n}$*. Considere* n *pontos no plano. A quantidade de retas que contêm pelo menos* k *deles é no máximo* cn^2/k^3*.*

Exercício 25 (Spencer, Szemerédi, Trotter)**.** *A quantidade de distâncias unitárias entre* n *pontos no plano é no máximo* $cn^{4/3}$*. (Dica: considere círculos de raio unitário com centro em cada ponto, e use arcos como arestas. Talvez você precise refinar um pouco os arcos.)*

Outra aplicação bacana é em teoria aditiva dos números. Sendo A um conjunto finito de reais, $A+A$ e $A \cdot A = \{ab : a, b \in A\}$ têm tipicamente $|A|^2$ elementos; mas podemos fazer $|A+A|$ relativamente pequeno se A é uma progressão aritmética ($|A+A| = 2|A|+1$ nesse caso) e $|A \cdot A|$ pequeno se A é uma progressão geométrica (mesma conta). Mas dá para deixar os dois pequenos (lineares) ao mesmo tempo? A resposta é não.

Teorema 7. *Existe uma constante* $c > 0$ *tal que, para todo conjunto* A *com* $|A| = n$*,*

$$\max\{|A+A|, |A \cdot A|\} \geq c \cdot n^{5/4}.$$

Demonstração. Começamos construindo funções f que levam $A+A$ a $A \cdot A$. Nesse caso, consideramos $f_{i,j}(x) = a_i(x - a_j)$. Cada função leva pelo menos n elementos de $A+A$ a $A \cdot A$ (no caso, $a_k + a_j$, $k = 1, 2, \ldots, n$).

Agora, considere as n^2 retas que são os gráficos dessas n^2 funções e os $|A+A||A \cdot A|$ pontos. Sabemos que cada reta passa por pelo menos n pontos, e então pelo teorema no exercício 24,

$$n^2 \leq \frac{c(|A+A||A \cdot A|)^2}{n^3} \implies |A+A||A \cdot A| \geq c' n^{5/2},$$

e $\max\{|A+A|, |A \cdot A|\} \geq \sqrt{c' n^{5/2}} = c'' n^{5/4}$. □

O melhor expoente é algo arbitrariamente próximo de 14/11, obtido em 2005 por József Solymosi.

5 Referências

- Dierk Schleicher e Malte Lackmann (editores). An Invitation to Mathematics: from Competitions to Research.
- D. G. Cantor e B. Gordon. Sequences of integers with missing differences.
- Jiři Matoušek. Blocking visibility for points in general position.
- Bjorn Poonen e Michael Rubinstein. The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon.
- Timothy Gowers. A new way of proving sumset estimates. Disponível em
  `https://gowers.wordpress.com/2011/02/10/a-new-way-of-proving-sumset-estimates/`
- Iosif Pinelis. Relations between the first four moments.
- Po-Shen Loh. Directed paths: from Ramsey to Ruzsa and Szemerédi.
- A demonstração do crossing number pode ser encontrada no (fantástico) livro Proofs from the Book, de Martin Aigner e Günter Ziegler, e que está indo para a sexta edição.
- László Székely. Crossing Numbers and Hard Erdős Problems in Discrete Geometry.
- Terence Tao. The crossing number inequality. Disponível em
  `https://terrytao.wordpress.com/2007/09/18/the-crossing-number-inequality/`
- On the number of sums and products. György Elekes.