Círculos que Tangenciam à Perfeição – O Teorema de Casey

Prof. Davi Lopes – OBM

22ª Semana Olímpica – Anápolis – 25/01/2019

1. Introdução

O Teorema de Ptolomeu diz que, se $ABCD$ é um quadrilátero convexo e inscritível, então $AC.BD = AB.CD + AD.BC$. Entretanto, existe uma generalização muito forte desse teorema, generalização esse extremamente útil em problemas de olimpíada, visto que ela envolve circunferências tangentes entre si e comprimentos de tangentes, assuntos relativamente comuns em problemas olímpicos de geometria. Tal generalização é o Teorema de Casey.

Vamos conhecer a sua demonstração, ver alguns problemas resolvidos, além de demonstrarmos os belos teoremas de Feuerbach e Sawayama-Thebault, cujas demonstrações originais são extremamente trabalhosas, mas, com o Teorema de Casey, obtemos demonstrações alternativas bem mais elementares. E, claro, problemas para o leitor se divertir bastante. Let's bora!

2. Demonstrando o Teorema de Casey

Antes de provarmos o teorema de Casey, demonstraremos o seguinte Lema Fundamental, que é importante para computarmos o comprimento da tangente de duas circunferências tangentes a uma circunferência comum, em função de elementos mais simples.

Lema Fundamental: Seja $\Gamma(O, R)$ uma circunferência, e $\omega_1(O_1, R_1), \omega_2(O_2, R_2)$ circunferências tangentes a Γ em T_1, T_2, respectivamente, de modo que ω_1 e ω_2 não englobem ω. Defina:

$$t = T_1T_2\sqrt{\frac{(R \pm R_1)(R \pm R_2)}{R^2}}$$

Onde o sinal $+$ é escolhido em R_1 quando ω_1 é tangente externamente a ω, e o sinal – é escolhido em R_1 quando ω_1 é tangente internamente a ω (o mesmo se aplica ao sinal de R_2). Então:

- Se ω_1, ω_2 são tangentes externamente a Γ (ou tangentes internamente), t é o comprimento da tangente externa a ω_1, ω_2 (Figuras 1a e 1b)
- Se ω_1 é tangente internamente a Γ e ω_2 é tangente externamente a Γ (ou vice-versa), t é o comprimento da tangente interna a ω_1, ω_2 (Figura 2)

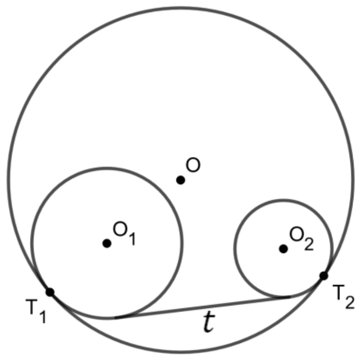


Figura 1a

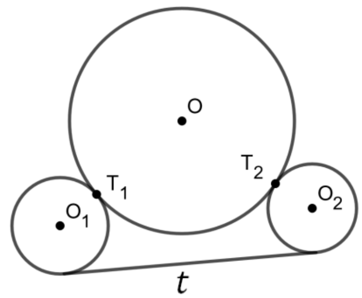


Figura 1b

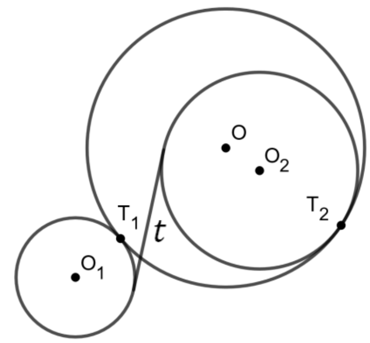
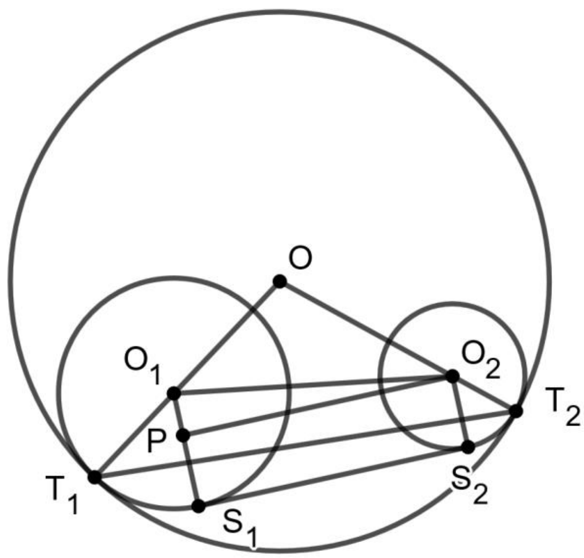


Figura 2

Demonstração: Faremos a demonstração para a situação da figura 1a. A prova para a situação das outras é análoga, mas com algumas diferenças nos cálculos, e é deixada como exercício.



Note que, pela lei dos cossenos nos triângulos T_1OT_2 e O_1OO_2, se $\alpha = \angle T_1OT_2 = \angle O_1OO_2$:

$$T_1T_2^2 = 2R^2(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{T_1T_2^2}{2R^2}$$

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1OO_2\cos\alpha =$$

$$= (R-R_1)^2 + (R-R_2)^2 - 2(R-R_1)(R-R_2)\left(1 - \frac{T_1T_2^2}{2R^2}\right) =$$

$$= (R-R_1)^2 + (R-R_2)^2 - 2(R-R_1)(R-R_2) + 2(R-R_1)(R-R_2)\left(\frac{T_1T_2^2}{2R^2}\right) =$$

$$= \left(R - R_1 - (R - R_2)\right)^2 + 2(R - R_1)(R - R_2)\left(\frac{T_1T_2^2}{2R^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1O_2^2 = (R_1 - R_2)^2 + (R - R_1)(R - R_2)\left(\frac{T_1T_2^2}{R^2}\right)\ (1)$$

Porém, pelo teorema de Pitágoras em O_1O_2P, temos:

$$O_1O_2^2 = O_1P^2 + O_2P^2 = (R_1 - R_2)^2 + S_1S_2^2\ (2)$$

De (1) e (2):

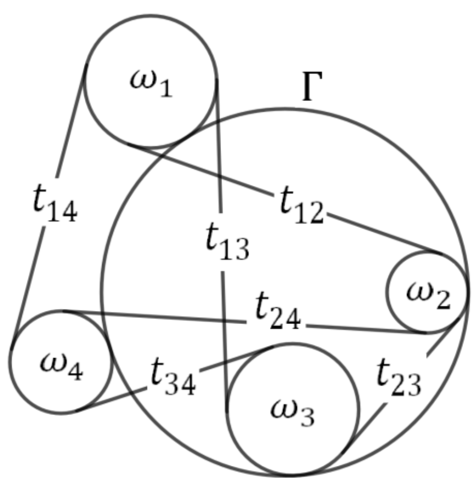
$$S_1S_2^2 = (R - R_1)(R - R_2)\left(\frac{T_1T_2^2}{R^2}\right) \Rightarrow S_1S_2 = T_1T_2\sqrt{\frac{(R - R_1)(R - R_2)}{R^2}} = t$$

Provando o lema fundamental.

Agora estamos prontos para enunciar e provar o teorema de Casey.

Teorema de Casey: Seja Γ uma circunferência e $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ circunferências tangentes a Γ, que não englobam Γ e estão nessa ordem em Γ. Se t_{ij} é o comprimento da tangente de ω_i a ω_j (que é externa, caso ω_i, ω_j estejam do mesmo lado relativo a Γ, e interna, caso ω_i, ω_j estejam em lados diferentes relativo a Γ, conforme o Lema Fundamental), então:

$$t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}$$



Demonstração: Pelo Lema Fundamental, temos que, se T_i é o ponto de tangência de Γ e ω_i $(i = 1,2,3,4)$, então:

$$t_{13}t_{24} = \left(T_1T_3\sqrt{\frac{(R \pm R_1)(R \pm R_3)}{R^2}}\right)\left(T_2T_4\sqrt{\frac{(R \pm R_2)(R \pm R_4)}{R^2}}\right) =$$

$$= (T_1T_3.T_2T_4)\left(\underbrace{\sqrt{\frac{(R \pm R_1)(R \pm R_2)(R \pm R_3)(R \pm R_4)}{R^4}}}_{S}\right) = (T_1T_3.T_2T_4).S$$

$$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} =$$

$$= \left(T_1T_2\sqrt{\frac{(R \pm R_1)(R \pm R_2)}{R^2}}\right)\left(T_3T_4\sqrt{\frac{(R \pm R_3)(R \pm R_4)}{R^2}}\right) +$$

$$+ \left(T_1T_4\sqrt{\frac{(R \pm R_1)(R \pm R_4)}{R^2}}\right)\left(T_2T_3\sqrt{\frac{(R \pm R_2)(R \pm R_3)}{R^2}}\right) =$$

$$= (T_1T_2.T_3T_4 + T_1T_4.T_2T_3)\left(\sqrt{\frac{(R \pm R_1)(R \pm R_2)(R \pm R_3)(R \pm R_4)}{R^4}}\right) =$$

$$= (T_1T_2.T_3T_4 + T_1T_4.T_2T_3)S$$

Note que o sinal em $R \pm R_i$ só depende da posição de ω_i relativa a Γ. Por isso, o sinal de $R \pm R_i$ é o mesmo em todas as contas. Daí os dois S serem iguais. Como $T_1T_2.T_3T_4 + T_1T_4.T_2T_3 = T_1T_3.T_2T_4$ (pelo teorema de Ptolomeu), temos que $t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}$, como queríamos ■

Observação 1: O teorema de Casey vale mesmo quando Γ é uma reta, pois uma reta é uma circunferência com $R \to \infty$.

Observação 2: Podemos considerar alguns ω_i como sendo circunferências de raio 0. Isso é particularmente útil em problemas, como veremos a seguir.

Observação 3: A recíproca do teorema de Casey também é verdadeira: dadas 4 circunferências $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, se existir uma escolha de sinais e uma escolha de tangentes interna/externas t_{ij} satisfazendo a equação:

$$\pm t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{24} \pm t_{14}t_{23} = 0$$

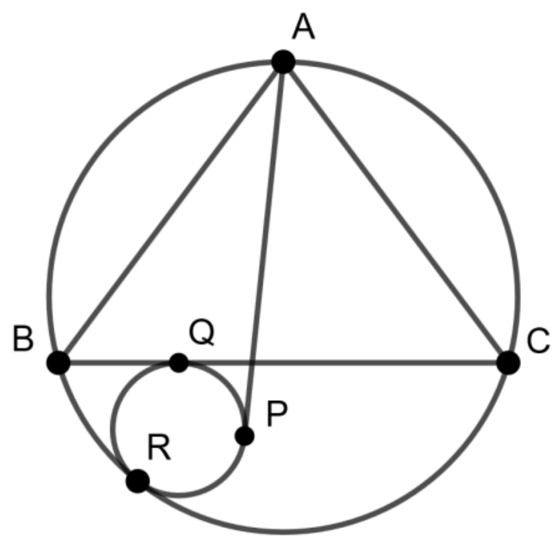
Então existe uma circunferência Γ (que pode ser uma reta) tal que Γ tangencia $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. A demonstração dessa recíproca foge do escopo desse material, e por isso não a mostraremos aqui.

3. Alguns Probleminhas Para Aquecer

Os exemplos a seguir, embora sejam relativamente simples, mostram o poder do teorema de Casey, facilitando bastante o problema, e sua versatilidade, ao considerarmos círculos de raio 0. Por isso esse teorema é tão OverPower. Então, vamos nessa!

Exemplo 1: ABC é um triângulo isósceles, de circuncírculo Γ, com $AB = AC = L$ Uma circunferência ω é tangente a BC e ao arco BC de Γ que não contém A. Uma tangente por A até ω toca ω em P. Descreva o local geométrico de P quando ω varia.

Solução:



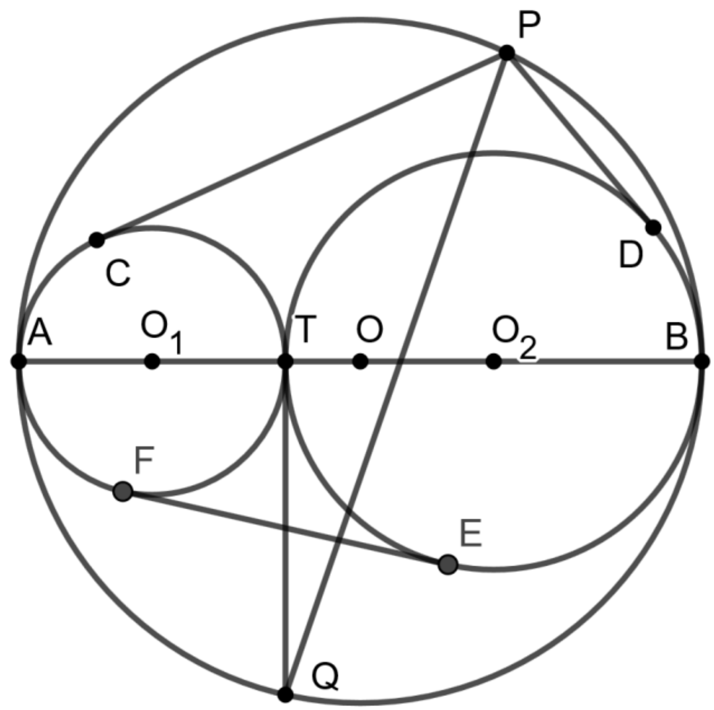
Aplicando o teorema de Casey nos círculos de raio 0 e de centros A, B, C, e em ω, temos:

$$BQ.AC + CQ.AB = BC.AP \Rightarrow L(BQ + CQ) = BC.AP \Rightarrow AP = L$$

E assim o lugar geométrico de P é um arco da circunferência de centro A e raio L, limitados por B e por C ■

Exemplo 2: (O) é uma circunferência com diâmetro AB e P, Q são dois pontos em (O), em lados diferentes de AB. T é a projeção ortogonal de Q em AB. Sejam $(O_1), (O_2)$ os círculos de diâmetros TA, TB e PC, PD são os segmentos tangentes desde P até $(O_1), (O_2)$, respectivamente. Mostre que $PC + PD = PQ$.

Solução:



Aplicando o teorema de Casey às circunferências de raio 0 P, Q e às circunferências $(O_1), (O_2)$:

$$PQ.EF = PC.QT + PD.QT = QT(PC + PD)\ (*)$$

Se r_1, r_2 são os raios de $(O_1), (O_2)$, respectivamente, temos, por Pitágoras no trapézio retângulo O_1O_2EF (basta só transladar a base EF):

$$EF^2 + (O_2E - O_1F)^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow EF^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2 \Rightarrow EF = 2\sqrt{r_1r_2}$$

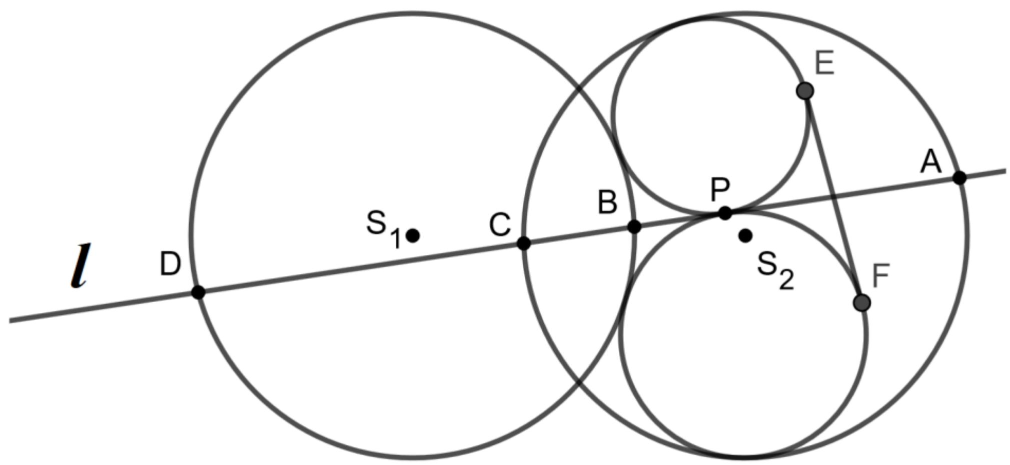
E como AQB é retângulo, e a altura QT é relativa à hipotenusa, as relações métricas implicam:

$$QT^2 = AT.TB = (2r_1)(2r_2) = 4r_1r_2 \Rightarrow QT = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Portanto, $EF = QT$ e, de $(*)$, $PC + PD = PQ$ ■

Exemplo 3 (Irã/1999): Duas circunferências congruentes $(S_1), (S_2)$ se intersectam em 2 pontos. Uma reta l intersecta (S_2) em A, C e (S_1) em B, D (A, B, C, D são colineares, nessa ordem). Duas circunferências ω_1, ω_2 tangenciam a reta l em lados opostos, e são tangentes externamente a (S_1), e tangentes internamente a (S_2). Se ω_1, ω_2 são tangentes externamente, prove que $AB = CD$.

Solução:



Antes de tudo, vamos enunciar um lema bem útil, cuja demonstração é deixada como exercício para o leitor.

Lema: Dada uma circunferência $\Gamma(O, R)$ e um ponto P dentro dela, seja $\Gamma'(O', R')$ a circunferência obtida de Γ por uma inversão de centro P e raio k. Suponha que Γ e Γ' tenham mesmo raio. Então, P é o ponto médio de OO' e $k^2 = -Pot_\Gamma P$ (muito cuidado com o sinal!)

Voltando ao problema, considere uma inversão ϕ de centro P e raio $k = \sqrt{PB.PD}$. Observe que $\phi\big((S_1)\big) = (S_1)$, que $\phi(\omega_1), \phi(\omega_2)$ são retas paralelas a l e que tangenciam (S_1) (pois ω_1, ω_2 tangenciam (S_1)), e que $\phi\big((S_2)\big) = (S_2')$ é tangente a $\phi(\omega_1), \phi(\omega_2)$ (pois ω_1, ω_2 tangenciam (S_2)). Assim, (S_1) e (S_2) são tangentes às duas retas paralelas $\phi(\omega_1), \phi(\omega_2)$, e por isso tem mesmo raio. Como $(S_1), (S_2)$ são congruentes, $(S_2), (S_2')$ também o são, e pelo lema, $k^2 = -Pot_{(S_2)}P = -(-PA.PC) = PA.PC \Rightarrow PB.PD = PA.PC$ $(*)$

Aplicando agora o teorema de Casey às circunferências de raio 0 B, D e às circunferências ω_1, ω_2, tangentes externamente a (S_1), temos:

$$EF.BD = BP.PD + BP.PD \therefore EF.BD = 2PB.PD \ (1)$$

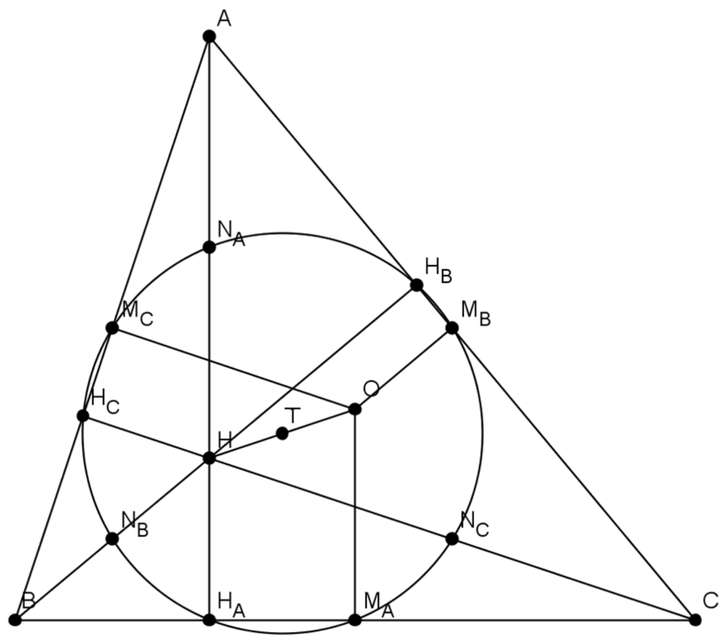
Aplicando ainda o teorema de Casey às circunferências de raio 0 A, C e às circunferências ω_1, ω_2, tangentes internamente a (S_2), temos:

$$EF.AC = CP.PA + CP.PA \therefore EF.AC = 2PA.PC \ (2)$$

De $(1), (2), (*)$: $EF.BD = EF.AC \Rightarrow BD = AC \Rightarrow AB = CD$ ■

4. Teorema de Feuerbach e Extensões

Um fato bastante interessante na geometria é que, dado um triângulo ABC, de ortocentro H e , os pontos médios dos 3 lados, os pés das alturas em cada um dos 3 lados, e os pontos médios de cada um dos segmentos AH, BH, CA são todos concíclicos. Tal circunferência é conhecida como *círculo dos 9 pontos* (ou círculo de Euler) de *ABC*. Além disso, o centro dessa circunferência é T (ponto médio de HO) e seu raio é metade do circunraio de ABC. A figura a seguir ilustra bem o círculo de Euler.



Mas, por incrível que pareça, tal circunferência tem outras propriedades incríveis, como o teorema de Feuerbach, que enunciaremos a seguir.

Teorema de Feuerbach: Dado um triângulo ABC, temos que o seu círculo de Euler é tangente ao seu incírculo e aos seus três excírculos.

Demonstração: Demonstraremos que o círculo de Euler Γ é tangente ao incírculo ω. A demonstração de que o círuclo de Euler é tangente a cada um dos 3 excírculos é análogo. Sejam M, N, P os pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente, e D, E, F os pontos de tangência do incírculo com BC, CA, AB, respectivamente. Sendo $BC = a, CA = b, AB = c, 2p = a + b + c$, sabemos que:

$$BM = MC = \frac{a}{2};\ CN = NA = \frac{b}{2}; AP = PB = \frac{c}{2}$$

$$AE = AF = p - a; BF = BD = p - b; CD = CE = p - c$$

Daí:

$$NP = \frac{a}{2}; PM = \frac{b}{2}; MN = \frac{c}{2};\ MD = \left|\frac{b-c}{2}\right|; NE = \left|\frac{c-a}{2}\right|;\ PF = \left|\frac{a-b}{2}\right|$$

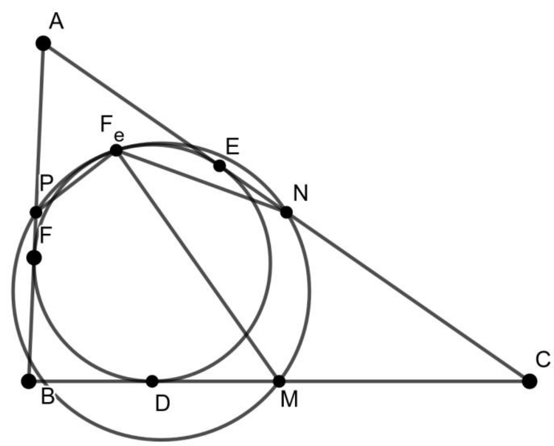
Dessa forma, supondo sem perda de generalidade $a \geq b \geq c$, temos:

$$NP.MD + MN.PF = \frac{a}{2}\left(\frac{b-c}{2}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{a-c}{2}\right) = PM.NE$$

Portanto, notando que MD, NE, PF são as tangentes, por M, N, P, a ω, temos que, pela recíproca do teorema de Casey, $(MNP) = \Gamma$ e ω são tangentes ■

Proposição: Considere F_e o ponto de tangência do círculo de Euler $\Gamma = (MNP)$ (M, N, P são pontos médios dos lados) e do incírculo ω. Então, dentre os segmentos F_eM, F_eN, F_eP, um deles é a soma dos outros dois.

Demonstração:



Supondo sem perda de generalidade $b \geq a \geq c$ (conforme a figura) e aplicando o Lema Fundamental aos círculos ω e $\omega'(M, 0)$, tangentes internamente a $\Gamma\left(T, \frac{R}{2}\right)$ (T é o centro do círculo de Euler e R é o circunraio de ABC):

$$t = MD = MF_e\sqrt{\frac{\left(\frac{R}{2} - r\right)\left(\frac{R}{2} - 0\right)}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}} = MF_e\sqrt{\frac{R-2r}{R}} \Rightarrow MF_e = \left(\frac{b-c}{2}\right)\sqrt{\frac{R}{R-2r}}$$

Analogamente, $NF_e = \left(\frac{a-c}{2}\right)\sqrt{\frac{R}{R-2r}}$, $PF_e = \left(\frac{b-a}{2}\right)\sqrt{\frac{R}{R-2r}}$, donde:

$$NF_e + PF_e = \left(\frac{a-c}{2} + \frac{b-a}{2}\right)\sqrt{\frac{R}{R-2r}} = \left(\frac{b-c}{2}\right)\sqrt{\frac{R}{R-2r}} = MF_e \; \blacksquare$$

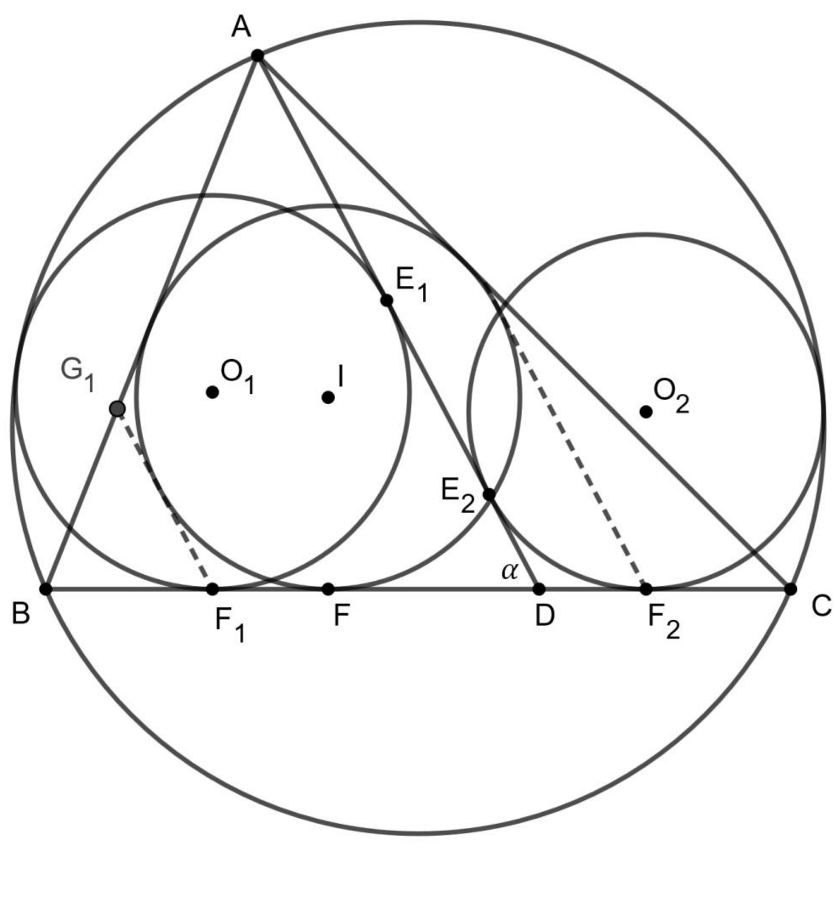
5. Teorema de Sawayama-Thebault e Extensões

Outra delícia de teorema é o mostrado abaixo, e por incrível que pareça, o teorema de Casey nos dá uma prova técnica e sem muitas construções engenhosas.

Teorema (Sawayama-Thebault): *ABC* é um triângulo cujo círculo circunscrito é Γ. *D* é um ponto arbitrário sobre o lado *BC*. $\omega_1(O_1, r_1)$ é uma circunferência tangente aos segmentos *AD* e *DB*, em E_1 e F_1, respectivamente, e ao arco *AB* de Γ. $\omega_2(O_2, r_2)$ é uma circunferência tangente aos segmentos *AD* e *DC*, em E_2 e F_2, respectivamente, e ao arco *AC* de Γ. Se $\omega(I, r)$ é o incírculo de ABC, e se $\alpha = \angle BDA$, então as afirmações são verdadeiras:

1. $r = r_1 \cos^2(\alpha/2) + r_2 \operatorname{sen}^2(\alpha/2)$;
2. As paralelas a AD por F_1 e F_2 são tangentes ao incírculo ω;
3. E_1, F_1, I são colineares, e E_2, F_2, I são colineares.
4. O_1, O_2, I são colineares.
5. $O_1I/O_2I \; = \operatorname{tg}^2(\alpha/2)$

Demonstração:



Seja $S = [ABC]$, $a = BC, b = CA, c = AB, 2p = a + b + c$, $x = DF_1 = DE_2$, $y = DF_2 = DE_1$. Seja ainda F o ponto de tangência de ω com BC, como indicado na figura.

1. Aplicando o teorema de Casey para A, B, C, ω_1:

$$AE_1.BC + BF_1.AC = CF_1.AB \Rightarrow (AD - x)a + (BD - x)b = (CD + x)c \Rightarrow$$

$$x(a + b + c) = 2px = a.AD + b.BD - c.CD \ (1)$$

Aplicando o teorema de Casey para A, B, C, ω_2:

$$AE_2.BC + CF_2.AB = BF_2.AC \Rightarrow (AD - y)a + (CD - y)c = (BD + y)b \Rightarrow$$

$$y(a + b + c) = 2px = a.AD - b.BD + c.CD \ (2)$$

Somando (1) e (2): $2p(x + y) = 2a.AD \ (*)$.

Entretanto, $x = r_1.\frac{\cos(\alpha/2)}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$ e $y = r_2.\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$, donde, substituindo em $(*)$:

$$p\left(\frac{r_1\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{(\operatorname{sen}\alpha)/2}}\right) = a.AD \Rightarrow$$

$$r_1\cos^2(\alpha/2) + r_2\operatorname{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1}{p}\left(\frac{a.AD.\operatorname{sen}\alpha}{2}\right) = \frac{1}{p}(S) = \frac{1}{p}(pr) = r$$

2. Vamos demonstrar que a paralela a AD por F_1 tangencia ω. A análise da outra paralela é análoga. Seja $G_1 \in AB$ tal que $F_1G_1 \parallel AD$. Para demonstrar tal fato, basta provarmos que o B-exraio de BF_1G_1, r', é igual a r, pois disso resultará que ω é o B-excírculo de BF_1G_1.

Manipulando a equação (1) de modo a evidenciar BF_1, temos:

$$2px = (a + b + c)x = a.AD + b.BD - c.CD = a.AD + b(BF_1 + x) - c(a - BF_1 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(x - AD + c) = (b + c)BF_1 \ (**)$$

Porém, $\Delta BF_1G_1 \sim \Delta BDA$ $\left(razão\ k = \frac{BF_1}{BD} = \frac{BF_1}{BF_1 + x}\right)$, donde $BG_1 = BA.k = ck$ e $F_1G_1 = AD.k$. Dessa forma:

$$r' = \frac{2[BF_1G_1]}{BG_1 + BF_1 - F_1G_1} = \frac{2[BF_1G_1]}{k(c + (BF_1 + x) - AD)} \ (3)$$

Ainda da semelhança, temos $\frac{[BF_1G_1]}{[BDA]} = k^2 \therefore [BF_1G_1] = k^2[BDA]$ e, da proporção das bases de triângulos de mesma altura, $[BDA] = \frac{BD}{BC}[ABC] = \left(\frac{BF_1+x}{a}\right)S$, donde $[BF_1G_1] = k^2\left(\frac{BF_1+x}{a}\right)S$. Substituindo em (3), vem:

$$r' = \frac{2k(BF_1+x)S}{a(c+(BF_1+x)-AD)} = \frac{2\left(\frac{BF_1}{BF_1+x}\right)(BF_1+x)S}{a(x-AD+c)+a.BF_1} \overset{(**)}{=} \frac{2BF_1.S}{(b+c)BF_1+a.BF_1} = \frac{2S}{2p} = r$$

3. Depois de todo o esforço feito antes, essa parte fica mais simples. Com efeito, do paralelismo entre F_1G_1 e AD, temos $\angle DF_1G_1 = 180° - \alpha$, e como I é o B-excentro de BF_1G_1, temos que F_1I é bissetriz de $\angle DF_!G_1$, o que resulta $\angle DF_1I = 90° - \alpha/2$. Porém, DE_1F_1 é triângulo isósceles de base E_1F_1, e com isso $\angle DE_1F_1 = 90° - \angle F_1DE_1/2 = 90° - \alpha/2 \therefore \angle DE_1F_1 = \angle DF_1I$, e por isso E_1, F_1, I são colineares. A demonstração de que E_2, F_2, I são colineares é totalmente análoga.

4 e 5. Novamente, pelo que foi visto do paralelismo entre F_1G_1, F_2G_2, AD e da tangência de ω a $F_1G_1,. F_2G_2$, temos que $\angle IF_1F = 90° - \alpha/2$ e $\angle IF_2F = \alpha/2$. Daí, $F_1F = r.\operatorname{tg}(\alpha/2)$ e $F_2F = r.\operatorname{cotg}(\alpha/2)$, e assim:

$$\frac{F_1F}{F_2F} = \operatorname{tg}^2(\alpha/2)$$

Como $O_1F_1, IF, O_2F_2 \perp BC$, para provarmos que O_1, I, O_2 são colineares, basta, pela recíproca do teorema de Tales aplicado às paralelas O_1F_1, IF, O_2F_2, provar que:

$$\frac{O_1F_1 - IF}{IF - O_2F_2} = \frac{F_1F}{F_2F}$$

De quebra, se provarmos isso, ainda provaremos a afirmação 5, pois do teorema de Tales aplicado às paralelas O_1F_1, IF, O_2F_2:

$$\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{F_1F}{F_2F} = \operatorname{tg}^2(\alpha/2)$$

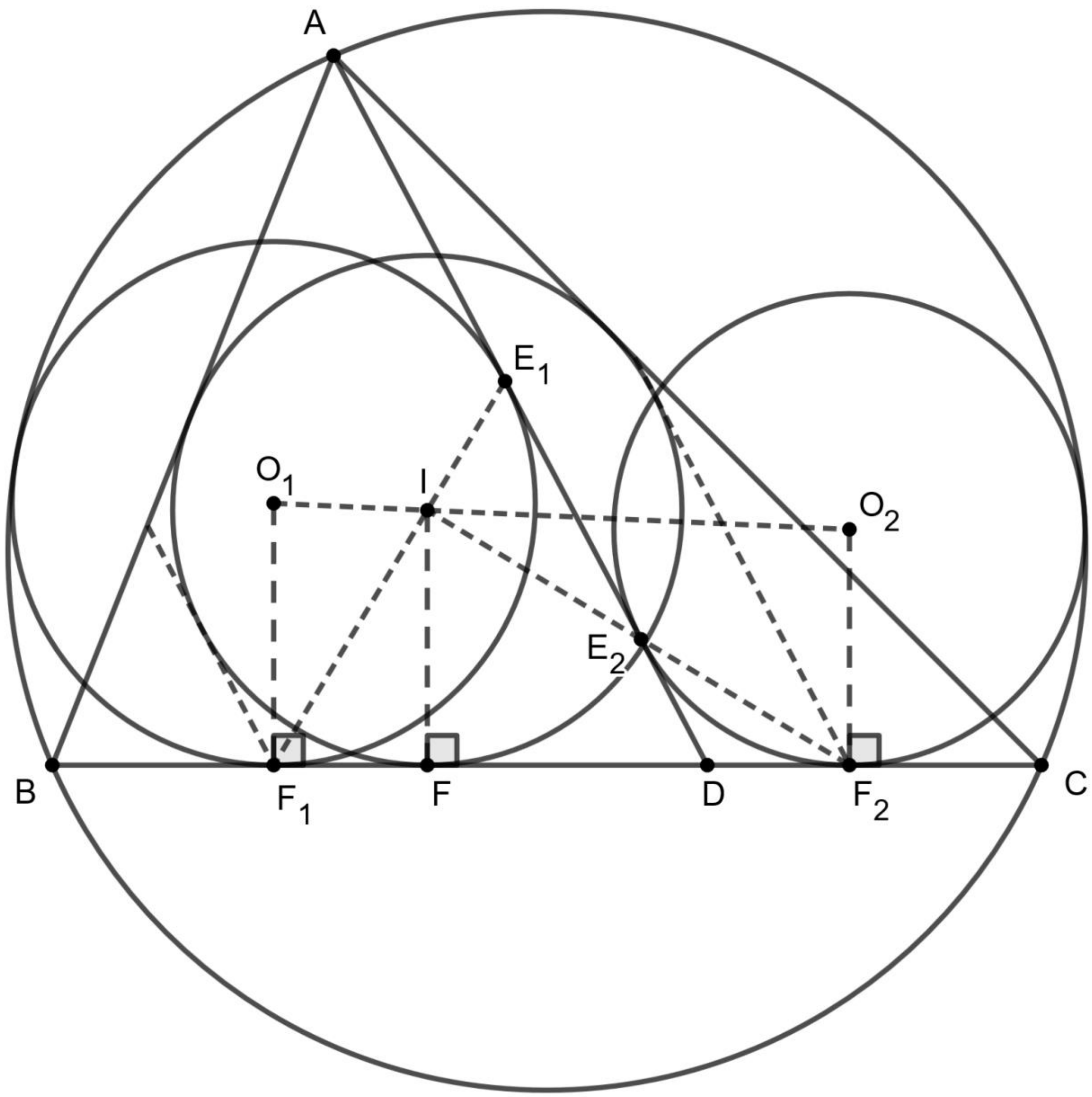
Para demonstrar isso, usaremos a afirmação (1).

$$\frac{O_1F_1 - IF}{IF - O_2F_2} = \frac{r_1 - r}{r - r_2} = \frac{r_1 - r_1\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - r_2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{r_1\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - r_2} =$$

$$= \frac{r_1\left(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - r_2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{r_1\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1\right)} = \frac{r_1\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - r_2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{r_1\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - r_2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(r_1 - r_2)\,\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(r_1 - r_2)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \text{tg}^2(\alpha/2) \quad \blacksquare$$

Após tantas afirmações demonstradas, a figura a seguir resume muito bem todo o trabalho feito aqui e toda a beleza desse teorema incrível!



E para encerrarmos em grande estilo, nada melhor do que problemas, muitos problemas, para usarmos o teorema de Casey e detonar geral. Até mais!

6. Problemas Olímpicos - Exercícios

Problema 1 (OBM/1996): Seja ABC um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência Γ_1; Γ_2 é uma circunferência tangente ao lado BC e ao menor arco BC de Γ_1. Uma reta através de A tangencia Γ_2 em P. Prove que $AP = BC$.

Problema 2: Seja ABC um triângulo e sejam B', C' pontos em AB, AC, respectivamente, tais que $B'C' \parallel BC$. Mostre que existe um círculo passando por B', C' e que é tangente simultaneamente ao incírculo e ao A-excírculo de ABC (Observe que esse resultado, de certa forma, generaliza o teorema de Feuerbach).

Problema 3: Considere um triângulo *ABC*, de incentro *I*, e cujo círculo circunscrito denota-se por Γ_1; Γ_2 é uma circunferência tangente aos lados *CA* e *CB* nos pontos *D* e *E*, respectivamente, e ao arco *AB* de Γ_1. Prove que *I* é o ponto médio do segmento *DE*.

Problema 4: No triângulo ABC acutângulo, sejam $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ os círculos tangentes aos pontos médios de BC, CA, AB e aos arcos menores BC, CA, AB, respectivamente. Se $\delta_{BC}, \delta_{CA}, \delta_{AB}$ denotam os comprimentos das tangentes externas entre ω_B e ω_C, ω_C e ω_A, ω_A e ω_B, respectivamente, prove que:

$$\delta_{BC} = \delta_{CA} = \delta_{AB} = \frac{p}{2}$$

Onde p é o semiperímetro de ABC.

Problema 5: *ABC* é um triângulo, com $AC > AB$. Uma circunferência ω_A é internamente tangente ao seu circuncírculo ω e AB, AC. S é o ponto médio do arco BC de ω que não contém A e ST é o segmento tangente de S a ω_A. Prove que:

$$\frac{ST}{SA} = \frac{AC - AB}{AC + AB}$$

Problema 6: *ABC* é um triângulo retângulo em A, com circuncentro O e circuncírculo Γ. Ω_B é tangente aos segmentos OB, OA e ao arco menor AB de Γ. Ω_C é tangente aos segmentos OC, OA e ao arco menor AC de Γ. Ω_B e Ω_C tocam OA em P, Q, respectivamente. Prove que:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$$

Problema 7: *ABC* é um triângulo equilátero de lado L. Sejam $\Gamma(O, R)$ e $\gamma(O, r)$ os circuncírculo e incírculo de *ABC*, respectivamente. P é um ponto em γ e P_1, P_2, P_3 são as projeções ortogonais de P em BC, CA, AB, respectivamente. As circunferências T_1, T_2, T_3 tangenciam BC, CA, AB em P_1, P_2, P_3, respectivamente, além de tangenciar internamente Γ em seus respectivos arcos menores. Prove que a soma dos comprimentos das tangentes externas comuns a T_1 e T_2, T_2 e T_3, T_3 e T_1, não depende do ponto P.

Problema 8: É dada uma semicircunferência com diâmetro *AB* e centro *O*. Uma reta perpendicular a *AB* pelo ponto $E \in OB$ intercepta a semicircunferência no ponto *D*. Uma circunferência, que é tangente a *DE* e *EB* nos pontos *K* e *C*, respectivamente, é tangente ao arco *AB* no ponto *F*. Prove que $\angle EDC = \angle BDC$

Problema 9 (Banco IMO/2000): Sejam *D*, *E* e *F* pontos sobre os lados *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente, do triângulo *ABC* tais que o triângulo *DEF* seja eqüilátero. Uma circunferência Γ tangencia a circunferência circunscrita ao triângulo *DEF*, externamente, e os segmentos *CD* e *CE* nos pontos *L*, *M* e *N*, respectivamente. Se *P* é um ponto sobre Γ tal que *FP* é tangente a Γ, mostre que $FP = DM + EN$.

Problema 10: Dado um triângulo *ABC*, de circuncírculo Γ, sejam D, E, F pontos variáveis sobre BC, CA, AB, respectivamente, de modo que AD, BE, CF são concorrentes. Construa as três circunferências k_1, k_2, k_3 fora do triângulo, tangentes a Γ a BC, CA, AB em D, E, F, respectivamente. Prove que a circunferência tangente externamente a essas três circunferências é sempre tangente a uma circunferência fixa.

Problema 11 (Teste IMO – Romênia/2006): Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB \neq AC$. Seja D o pé da altura de A e Γ o circuncírculo do triângulo. Seja ω_1 a circunferência tangente a AD, BD e Γ (internamente). Seja ω_2 a circunferência tangente a AD, CD e Γ (internamente). Seja $\ell \neq AD$ a tangente interna comum a ω_1 e ω_2. Prove que ℓ passa pelo ponto médio de BC se, e somente se, $2BC = AB + AC$.

Problema 12: Uma circunferência Γ passa pelos vértices B, C do triângulo ABC e outro círculo ω tangencia $AB, AC,$ Γ em P, Q, T, respectivamente. Se M é o ponto médio do arco BTC de Γ, prove que BC, PQ, MT concorrem.