Introdução às Equações Funcionais

Prof. Davi Lopes – OBM

22ª Semana Olímpica – Anápolis – 21/01/2019

1. Introdução

Estudaremos aqui um dos assuntos mais requisitados no mundo olímpico: as equações funcionais. Tema que aparece com bastante frequência nas olimpíadas ao redor do mundo, especialmente nas competições internacionais.

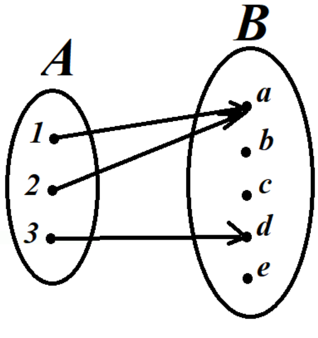
O que torna esse assunto mais fascinante (Pode ser fácil, pode ser difícil, mas é fascinante do mesmo jeito) é que não existe muita teoria profunda para resolvermos esse tipo de problemas. Os conceitos básicos sobre funções como injetividade, sobrejetividade, domínio, imagem, pontos fixos, e assim por diante, são pré-requisitos, mas dependeremos de muito treino para saber quando esses conceitos serão utilizados. O segredo está aí: treino (muito treino!) e mente aberta. Isso é tudo o que você vai precisar para resolver esses problemas.

2. Definições e Conceitos Básicos

2.1. Definição de Função e Elementos de uma Função

Definição de Função: Sejam A e B conjuntos. Uma função $f: A \to B$ é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ um *único elemento* $y \in B$. Escrevemos essa correspondência como $y = f(x)$.

Exemplo: se $A = \{1,2,3\}$; $B = \{a, b, c, d, e\}$; podemos definir a função $f: A \to B$ pelas regras: $f(1) = a, f(2) = a, f(3) = d$.



Dada uma função $f: A \to B$, temos as seguintes denominações:

Domínio de f: É o conjunto $A = Dom(f)$.

Contradomínio de f: É o conjunto $B = CDom(f)$.

Imagem de f: É o conjunto $Im(f)$ tal que $Im(f) \subset B$ e que para todo $y \in Im(f)$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, e para todo $x \in A$, $f(x) \in Im(f)$. Em outras palavras, o conjunto imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que f pode assumir.

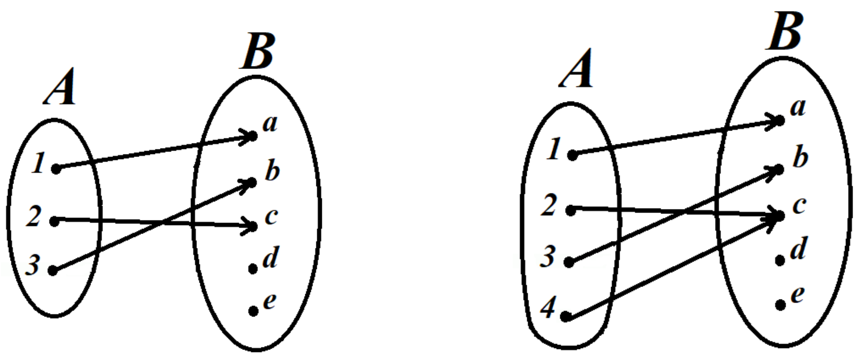
Observação: Nem sempre temos $B = Im(f)$. Por exemplo, na função f do exemplo acima, $Dom(f) = \{1,2,3\}$, $CDom(f) = \{a, b, c, d, e\}$ e $Im(f) = \{a, d\}$.

2.2. Injetividade e Sobrejetividade

Alguns tipos de funções são, de modo geral, imprescindíveis para o estudo de diversas teorias e a resolução de vários problemas. Algumas delas são as seguintes:

Funções Injetoras ou Injetavas: São as funções onde cada elemento do contradomínio está associado a no máximo um elemento do domínio. Em outras palavras, f é injetora quando $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a, b \in Dom(f)$ (Note que $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$ facilmente, uma vez que a função associa a cada número um único outro número).

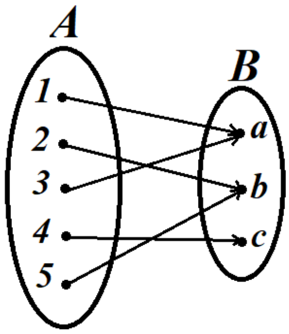
Exemplo: A função representada graficamente abaixo, à esquerda, é injetora. Por outro lado, a função representada graficamente abaixo, à direita, não é injetora, pois existe um $y \in B$ tal que $f(x) = y$ assume mais de uma solução x (no caso, $y = c$ e $x = 2$ e 4).

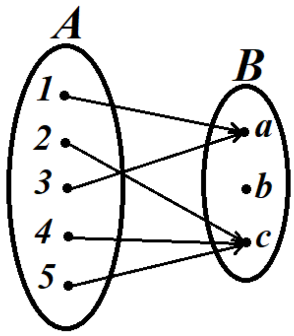


Note que $a = b$ implica $f(a) = f(b)$, mas que a afirmação contrária nem sempre é verdade. Só podemos afirmar que $f(a) = f(b)$ implica $a = b$ quando f for injetora. De maneira mais informal: Numa igualdade, podemos colocar quantos f's quisermos, mas só podemos "cancelar" f's quando f foi uma função injetora.

Funções Sobrejetoras ou Sobrejetivas: São as funções onde $CDom(f) = Im(f)$. Em outras palavras, f é sobrejetora quando, para cada elemento $y \in CDom(f)$, existir um elemento $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = y$.

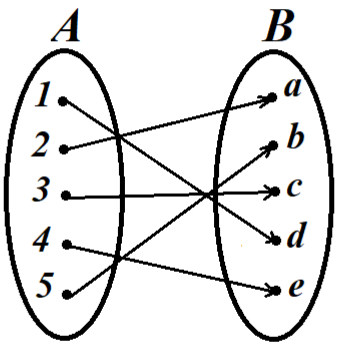
Exemplo: A função representada graficamente abaixo, à esquerda, é sobrejetora. Por outro lado, a função representada graficamente abaixo, à direita, não é sobrejetora, pois existe um $y \in B$ tal que $f(x) = y$ não tem solução x (no caso, $y = b$).





Funções Bijetoras ou Bijetivas: São as funções que são simultaneamente injetoras e sobrejetoras.

Exemplo: A função representada graficamente abaixo é bijetora.



É interessante notar que, se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos, respectivamente ($|A| = m, |B| = n$), podemos fazer as seguintes observações, cuja demonstração é um exercício simples para o leitor:

- Se $f: A \to B$ é injetora, então $m \leq n$.
- Se $f: A \to B$ é sobrejetora, então $m \geq n$.
- Se $f: A \to B$ é bijetora, então $m = n$.

Por isso que, em muitos problemas de combinatória, para provarmos que dois conjuntos dados possuem a mesma quantidade de elementos, basta construir uma bijeção de um desses conjuntos até outro.

2.3. Monoticidade, Crescimento e Decréscimo

Outro conceito, muito importante e frequente nos problemas de funções, é o monoticidade em geral, que pode ser subdivido nas seguintes categorias.

Função Estritamente Crescente: Dizemos que uma função f, definida em um subconjunto dos reais, é estritamente crescente se, para quaisquer x e y reais no domínio (Fig. 1):

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Função Estritamente Decrescente: Dizemos que uma função f, definida em um subconjunto dos reais, é estritamente decrescente se, para quaisquer x e y reais no domínio (Fig. 2):

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Função Crescente: Dizemos que uma função f, definida em um subconjunto dos reais, é estritamente crescente se, para quaisquer x e y reais no domínio (Fig. 3):

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Função Decrescente: Dizemos que uma função f, definida em um subconjunto dos reais, é estritamente decrescente se, para quaisquer x e y reais no domínio (Fig. 4):

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Função Constante: Dizemos que uma função f, definida em um subconjunto dos reais, é estritamente decrescente se, para quaisquer x e y reais no domínio (Fig. 5):

$$f(x) = f(y)$$

Função Monótona: É toda função que é crescente ou que é decrescente.

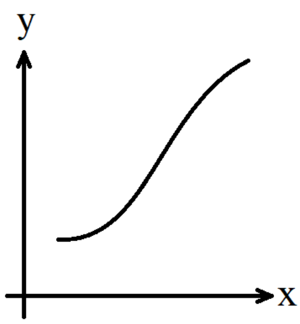


Fig. 1

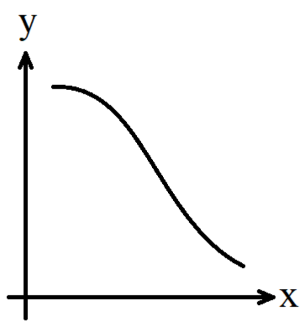


Fig. 2

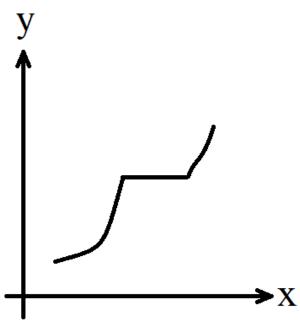


Fig. 3

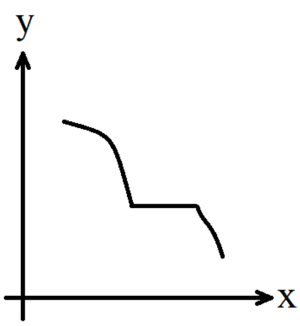


Fig. 4

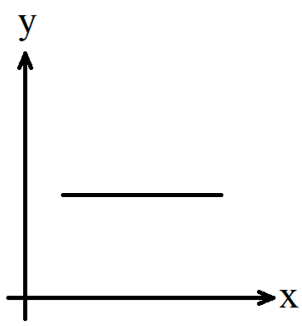


Fig. 5

Uma afirmação extremamente útil (e que, novamente, é um exercício simples para o leitor) é que, se f é estritamente crescente, ou estritamente decrescente, então f é uma função injetora.

2.4. Paridade e Periodicidade

Os conceitos a seguir costumam aparecer de maneira corriqueira nos problemas de equações funcionais, seja como funções que resolvem o problema, seja como substituições a se fazerem. Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

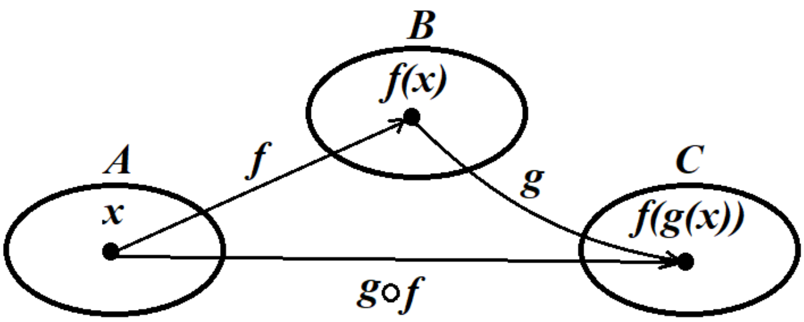
- f é uma função par se $f(-x) = f(x), \forall x \in A$.
- f é uma função ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$.

Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ é par, e a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ é ímpar (entendem agora o porquê dos nomes "função par" e "função ímpar"?)

Dizemos também que uma função $f: A \to B$ é *periódica* de existir $p \neq 0$ tal que, para todo $x \in A$, temos $f(x) = f(x + p)$. Se p for o menor valor positivo que satisfaz a igualdade acima, então p é chamado de *período fundamental* da função. Por exemplo, a função *parte fracionária* é periódica, de período fundamental igual a $p = 1$.

2.5. Funções Compostas e Inversas

Função Composta: Dadas duas funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, a função $g \circ f: A \to C$ é a função composta, definida por $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big), \forall x \in A$.



Observação 1: para que exista $g \circ f$, é necessário que o contradomínio de f seja igual ao domínio de g.

Observação 2: $g \circ f(x)$ nem sempre é o mesmo que $f \circ g(x)$. Por exemplo, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 2$, então:

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x + 2) = (x + 2\,)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^3) = x^3 + 2$$

Cujas fórmulas mostram que elas são diferentes.

Função Inversa: Dada uma função $f: A \to B$ bijetora, pode-se provar que existe uma função $f^{-1}: B \to A$ tal que $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$. Tal função é conhecida como a inversa de f, e nesse caso dizemos que f é inversível.

Exemplo: $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ tem como inversa a função $f^{-1}: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ dada por $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$. De fato:

$$y = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y}$$

Observação 1: f é inversível se, e somente se, f é bijetora. Além disso, tal inversa é sempre única.

Observação 2: $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ e $f\left(f^{-1}(x)\right) = x, \forall x \in B$, $f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \forall x \in A$. Entretanto, não podemos afirmar que $f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right)$, uma vez que $f\left(f^{-1}(x)\right) \in B$ e $f^{-1}\left(f(x)\right) \in A$, sendo que isso só pode ser afirmado quando $A = B$.

Uma dica valiosíssima, cuja demonstração é simples e deixada como exercício: se $f\left(g(x)\right) = h(x)$ é uma função bijetora, então f é uma função sobrejetoras e g é uma função injetora (se você quiser uma dica de como demonstrar esse fato, leia o exemplo 7, que virá logo mais).

3. Alguns Exercícios Introdutórios

Veremos a seguir alguns exercícios que, embora simples, nos ajudarão a entender a dinâmica das equações funcionais, e que por isso serão discutidos aqui.

Exemplo 1 (OBM/2004 – 1ª Fase): A função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida nos inteiros, satisfaz à equação $f(n) - (n+1)f(2-n) = (n+3)^2$, para todo n inteiro. Quanto vale $f(0)$?

Solução: A ideia das equações funcionais é trocar a variável por valores convenientes a nós, de modo a determinar o que queremos. Nesse caso, estamos interessados em $f(0)$, de modo que, a princípio, é natural trocar n por 0 ($n \leftarrow 0$):

$$f(0) - (0+1)f(2-0) = (0+3)^2 \Rightarrow f(0) - f(2) = 9$$

Apareceu o $f(2)$, e agora? Como tirá-lo da jogada? Que tal fazer $n \leftarrow 2$?

$$f(2) - (2+1)f(2-2) = (2+3)^2 \Rightarrow f(2) - 3f(0) = 25$$

Interessante! Agora, podemos isolar $f(0)$, substituindo $f(2)$:

$$f(0) - \left(25 + 3f(0)\right) = 9 \Rightarrow -2f(0) = 9 + 25 = 34 \Rightarrow f(0) = -17 \blacksquare$$

Exemplo 2 (OBM/2009 – 1ª Fase): Seja $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma função satisfazendo $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(x+12) = f(x+21) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, qual o valor de f(2009)?

Solução: Esse exemplo é bem interessante, pois mostra o poder de trocar uma variável por uma nova variável, só que levemente diferente. Como assim? Vejamos...

Na equação $f(x + 12) = f(x + 21) = f(x)$, trocando x por $y - 12$, temos que $f(y - 12 + 12) = f(y - 12 + 21) = f(y - 12) \therefore f(y) = f(y + 9)$. Porém, como x varia sobre todos os real, y também varia, de modo que podemos afirmar que $f(y) = f(y + 9), \forall y \in \mathbb{Z}$. Trocando y por x (só pra mudar a letra da variável), temos $f(x) = f(x + 9), \forall x \in \mathbb{Z}$. Poderíamos ter resumindo tudo isso dizendo $x \leftarrow x - 12$, de modo que, no próximo passo, faremos isso.

Se em $f(x + 12) = f(x)$ fizermos $x \leftarrow x - 9$, então $f\big((x - 9) + 12\big) = f(x - 9) \Rightarrow f(x + 3) = f(x - 9)$ e como $f(x - 9) = f(x - 9 + 9) = f(x)$, então $f(x) = f(x + 3)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Isso significa que f é 3-periódica, e como 2009 deixa resto 2 por 3, temos $f(2009) = f(2) = 2$ ■

Exemplo 3 (OBM/2008): Considere a função f, definida no conjunto dos números reais e satisfazendo $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$ para todo $x \neq -3/2$. Determine o número de tais funções f para as quais $f\big(f(x)\big) = x$, para todo x tal que $f\big(f(x)\big)$ está bem definida.

Solução: $f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{cx}{2x+3}\right) = \frac{c\left(\frac{cx}{2x+3}\right)}{2\left(\frac{cx}{2x+3}\right)+3} = \frac{\frac{c^2x}{2x+3}}{\frac{2cx+3(2x+3)}{2x+3}} = \frac{c^2x}{(2c+6)x+9} = x \Leftrightarrow$ $c^2x = (2c + 6)x^2 + 9x \Leftrightarrow (2c + 6)x^2 + (9 - c^2)x = 0\ (*)$, para todo x onde $f \circ f$ está bem definida, ou seja, onde o denominador não é anulado (para $x \neq -3/2$ e para $x \neq -9/(2c + 6)$). Isso significa que $(*)$ é uma equação do segundo grau com infinitas raízes, ou seja, $2c + 6 = 0$ e $9 - c^2 = 0$, donde $c = -3$. Assim, $f(x) = \frac{-3x}{2x+3}$ e só existe uma função f ■

Exemplo 4 (OBM/2003): Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)(f(x) - x) = 0$, então quantas funções f satisfazem o enunciado?

Solução: A princípio, parece que só existem duas funções f satisfazendo o enunciado: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Porém, a verdade é que há infinitas funções f: basta "misturar" as duas soluções!

Mas como assim? $f(x)(f(x) - x) = 0$ implica naturalmente $f(x) = x$ ou $f(x) = 0$, então só há duas soluções e acabou! Acontece que tal equação diz, na verdade, que, se fixarmos um x, então $f(x) = x\ ou\ 0$. Porém, se fixarmos outro x, podemos ter $f(x) = 0\ ou\ x$, de modo que tudo depende de cada x que escolhermos. Por exemplo, abaixo seguem três funções que podem satisfazer o problema:

$$f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ 0, se\ x < 0 \end{cases}; f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 1 \\ 0, se\ x < 1 \end{cases}; f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 2 \\ 0, se\ x < 2 \end{cases}$$

Obviamente podemos trocar 0,1,2 por qualquer número real. E como há infinitos números reais, há infinitas funções f ■

Observação: Essa não é a única forma de construir uma função f. Experimente!

E falando em experimentar, experimente também resolver os exercícios abaixo.

Exercício 1 (OBM/2012 – 1ª Fase): Seja $N = \{0,1,2,...\}$ e considere $f: N \to N$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural n ≥ 1, satisfaz as seguintes condições:

i) $f(3n) = 3f(n) + 1$;
ii) $f(3n + 1) = 3f(n) + 2$;
iii) $f(3n + 2) = 3f(n)$;

Determine $f(2012)$.

Exercício 2 (OBM/2000 – 1ª Fase): Seja f uma função real tal que:

i) Para todos x, y reais, $f(x + y) = x + f(y)$;
ii) $f(0) = 2$.

Quanto vale $f(2000)$?

Exercício 3 (OBM/2002 – 1ª Fase): Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição:

$$f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$$

para $x > 0$. O valor de $f(2)$ é igual a quanto?

Exercício 4 (OBM/2001 – 1ª Fase): Seja f uma função de Z em Z definida como $f(x) = x/10$ se x é divisível por 10 e $f(x) = x + 1$ caso contrário. Se $a_0 = 2001$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, qual é o menor valor de n para o qual $a_n = 1$?

Exercício 5 (OBM/2004 – 1ª Fase): A função f é dada pela tabela a seguir:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Quanto vale $\underbrace{f(f(...(f(f}_{2004\text{ vezes}}(4))...)))$?

Exercício 6 (OBM/2003 – 1ª Fase): A função f é definida para todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:

$f(x; x) = x$, $f(x; y) = f(y; x)$, $(x + y)f(x; y) = (2x + y)f(x; x + y)$.

Qual é o valor de $f(21; 12)$?

4. Equações Funcionais

A partir de agora, vamos aprender a resolver algumas equações funcionais. A resposta de uma equação funcional é, como o próprio nome diz, uma função, com leis bem estabelecidas, que dependem apenas da variável. O desafio dessas questões é justamente isolar a função da equação.

Exemplo 5 (OBM/2003 – 2ª Fase): Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Solução: Como isolar a função? Como e onde começar? Geralmente, tentamos substituir valores particulares e simples na equação funcional (por exemplo, $x = 0$, $x = 1$, $x = y$, etc). Não há uma regra exata para saber qual a melhor substituição logo de cara, e o jeito é tentar mesmo. Só tome cuidado para saber se o valor que você está substituindo esteja no domínio (nesse problema, não podemos substituir $x, y = 0$, pois $0 \notin \mathbb{R}^* = Dom(f)$).

Então vamos tentar um valor simples diferente: Na equação original, $x, y \leftarrow 1$:

$$f(1)f(1) - f(1.1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \Rightarrow f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau em $y = f(1)$, obtemos $f(1) = -1$ ou $f(1) = 2$. Como saber qual dos dois valores é o verdadeiro? Vejamos cada caso.

- Se $f(1) = -1$, faça $y \leftarrow 1$ na equação original:

$$f(x)f(1) - f(x.1) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x} \Rightarrow -2f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^* \ (1)$$

- Se $f(1) = 2$, faça $y \leftarrow 1$ na equação original:

$$f(x)f(1) - f(x.1) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^* \ (2)$$

Afinal, qual das duas funções é a solução do problema? (1) ou (2)? A única maneira de saber é *testando cada função*! Vamos testar primeiro a função (1).

Testando $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right)\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}xy + \frac{1}{4}.\frac{x}{y} + \frac{1}{4}.\frac{y}{x} + \frac{3}{4}.\frac{1}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow xy + \frac{1}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ (*)$$

Para todos os números reais não-nulos x, y. Porém, a fórmula "não bate", não é mesmo? Isso significa que isso não é verdade, e uma forma bem rápida de verificar isso é atribuir valores de x, y que invalidam $(*)$. Por exemplo, se $x = y = 2$, deveríamos ter $2.2 + \frac{1}{2.2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \Rightarrow 4 + \frac{1}{4} = 2$, o que claramente é um absurdo. Portanto, esse caso é inválido, e apenas (2) é solução do problema. Portanto, $f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$

Mas, espere! Onde está o quadradinho preto que indica que o problema foi resolvido? A gente achou a lei de formação de f, então acabou! Só que não...

Na verdade, pode acontecer com essa lei de formação o mesmo que aconteceu com a lei de formação anterior: não dar certo. Por isso, toda vez que encontrarmos uma solução, é preciso testá-la, ainda que essa função seja a única resposta possível. Pode ser que dê certo, pode ser que não, de modo que só há uma maneira de saber: testando.

Testando $f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - xy - \frac{1}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ (OK!)$$

Deu certo! Isso significa que $f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$ é a solução, e depois de testar todos os casos, podemos dizer que concluímos o problema. Ou seja, podemos colocar o quadradinho preto: ■

Exemplo 6 (Suíça/99): Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Solução: Uma tática bem interessante em problemas de equações funcionais é tentar "trocar" o que aparece dentro de dois f's de lugar. Nesse caso, podemos trocar $-x$ e $\frac{1}{x}$ de lugar fazendo $x \leftarrow -\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{-\frac{1}{x}} f\left(-\left(-\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{-\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{x} \Rightarrow -xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = -\frac{1}{x} \ (*)$$

De $(*)$, temos $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(-x) + \frac{1}{x}}{x}$, e substituindo na equação original:

$$\frac{1}{x} f(-x) + \frac{f(-x) + \frac{1}{x}}{x} = x \Rightarrow 2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x} \ (1)$$

Se fizermos $x \leftarrow -x$ em (1):

$$2f\big(-(-x)\big) = (-x)^2 - \frac{1}{-x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Falta testar a função, então vamos lá!

$$\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2x}\left((-x)^2 + \frac{1}{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{x}{2} = x \Leftrightarrow x = x\ (OK!)$$

Conclusão: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$ ■

Exemplo 7 (Japão/2004): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f\big(xf(x) + f(y)\big) = \big(f(x)\big)^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Solução: Inicialmente, façamos $x \leftarrow 0$ na equação original. Daí:

$$f\big(0f(0) + f(y)\big) = f(0)^2 + y \Rightarrow f\big(f(y)\big) = f(0)^2 + y, \forall y \in \mathbb{R}\ (1)$$

A função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = f(0)^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$, é injetora, pois $h(a) = h(b) \Rightarrow f(0)^2 + a = f(0)^2 + b \Rightarrow a = b$. Ela também é sobrejetora, pois para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = y$. De fato, basta tomar $x = y - f(0)^2$, uma vez que $h(x) = h(y - f(0)^2) = f(0)^2 + y - f(0)^2 = y \therefore h(x) = y$. Portanto, h é bijetora.

Agora, veja que, de (1), $f\big(f(y)\big) = h(y)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Dessa forma, f é injetora, pois $f(a) = f(b) \Rightarrow f\big(f(a)\big) = f\big(f(b)\big) \Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow a = b$ (pois h é injetora). Além disso, f também é sobrejetora, pois dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. De fato, basta tomar $x = f(x')$, onde $x' \in \mathbb{R}$ é tal que $h(x') = y$ (tal x' existe, pois h é sobrejetora). Assim, $f(x) = f\big(f(x')\big) = h(x') = y \therefore f(x) = y$. Portanto, f é bijetora, e assim existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Na equação original, faça $x \leftarrow x_0$:

$$f\big(x_0 f(x_0) + f(y)\big) = \big(f(x_0)\big)^2 + y \therefore f\big(f(y)\big) = y, \forall y \in \mathbb{R}\ (2)$$

Combinando (1) e (2), $f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ (3)

Ademais, se na equação original, fizermos $x \leftarrow f(x)$, temos:

$$f\Big(f(x)f\big(f(x)\big) + f(y)\Big) = \Big(f\big(f(x)\big)\Big)^2 + y \overset{(2)}{\Rightarrow} f\big(f(x)x + f(y)\big) = x^2 + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\big(xf(x) + f(y)\big) = x^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R}\ (4)$$

Veja a equação original. O lado esquerdo dela é igual ao lado esquerdo de (4), de modo que podemos inferir que $x^2 + y = \big(f(x)\big)^2 + y \Rightarrow x^2 = f(x)^2$, donde $f(x) = x \; ou - x, \forall x \in \mathbb{R} \; (*)$,. Como vimos no exemplo 4, isso não necessariamente implica que haja apenas duas soluções. Porém, como esse é um problema olímpico de equações funcionais, é natural supor que não há soluções que "misturam" o x e o $-x$. Mas como provar isso?

Suponhamos que essa solução "misturada" apareça, ou seja, que existam $a, b \in \mathbb{R}^*$ tais que $f(a) = a$ e $f(b) = -b$ (já sabemos que $f(0) = 0 = -0$, ou seja, só precisamos olhar para valores diferentes de 0). Fazendo $x \leftarrow b$ e $y \leftarrow a$ na equação original, temos:

$$f\big(bf(b) + f(a)\big) = \big(f(b)\big)^2 + a \Rightarrow f(b(-b) + a) = (-b)^2 + a \Rightarrow$$

$$f(a - b^2) = a + b^2 \; (5)$$

De $(*)$, $f(a - b^2) = a - b^2 \; ou \; b^2 - a$. No primeiro caso, $a - b^2 = a + b^2$, donde $b = 0$, um absurdo. No segundo caso, $b^2 - a = a + b^2$, donde $a = 0$, outro absurdo. Portanto, f só possui uma lei de formação, ou seja, $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Falta testar essas funções!

Testando $f(x) = x$: $f\big(xf(x) + f(y)\big) = \big(f(x)\big)^2 + y \Leftrightarrow f(x^2 + y) = x^2 + y$, o que é claramente verdade.

Testando $f(x) = -x$: $f\big(xf(x) + f(y)\big) = \big(f(x)\big)^2 + y \Leftrightarrow f(-x^2 - y) = x^2 + y \Leftrightarrow -(-x^2 - y) = x^2 + y \Leftrightarrow x^2 + y = x^2 + y \; (OK!)$

Portanto, as funções que satisfazem o nosso problema são $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ ■

Exemplo 8 (Rússia/2000): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Solução: Espere um pouco! Isso não é uma equação funcional, mas sim uma INEQUAÇÃO FUNCIONAL! Como a gente resolve essa coisa? O segredo está justamente em usar duas desigualdades para provar uma igualdade. Em termos matemáticos, se provarmos que $a \geq b$ e que $a \leq b$, provamos que $a = b$, convertendo as inequações em equações. Devemos usar isso em nosso favor nesse problema.

Se na equação funcional fizermos $y, z \leftarrow 0$:

$$f(x + 0) + f(0 + 0) + f(0 + x) \geq 3f(x + 2.0 + 3.0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x) + f(0) \geq 3f(x) \Rightarrow f(0) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R} \; (*)$$

Agora é a vez de jogar $f(0)$ para o lado direito da inequação, e fazemos isso colocando $y \leftarrow x$ e $z \leftarrow -x$:

$$f(x+x)+f(x-x)+f(-x+x) \geq f(x+2x-3x) \Rightarrow$$

$$f(2x)+2f(0) \geq 3f(0) \Rightarrow f(2x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}\ (1)$$

Quase! Mas podemos fazer $x \leftarrow x/2$ em (1) para ter $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}\ (**)$. Isso significa que, de $(*), (**)$, $f(x) = f(0)$, e como $f(0)$ é constante, concluímos que $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, onde $c = f(0)$ é essa constante. Falta só testar essa função, e mesmo que o teste seja trivial, devemos fazê-lo sempre!

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z) \Leftrightarrow c+c+c \geq 3c\ (OK!)$$

Conclusão: Para qualquer constante real c, $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ é solução. Em outras palavras, todas as soluções do problema são todas as funções constantes reais ■

Exemplo 9: Determine todas as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f\big(f(n)\big) + f(n) = 2n + 3$ (OBS: $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$).

Solução: Fazendo $n \leftarrow 1$, $f\big(f(1)\big) + f(1) = 5\ (*)$. O bom de termos o contradomínio como $\mathbb{N}$ é que ele limita os valores de $f(1)$ em (1). Dessa forma, como $f\big(f(1)\big) \geq 1$, temos que $f(1) \leq 5 - 1 = 4$. Portanto, $f(1) = 1,2,3\ ou\ 4$.

Se $f(1) = 4$, então de $(*)$ temos $f(4) = 1$. Fazendo $n \leftarrow 4$ na equação original, temos $f\big(f(4)\big) + f(4) = 2.4 + 3 \Rightarrow f(1) + f(4) = 11 \Rightarrow 4 + 1 = 11$, um absurdo.

Se $f(1) = 3$, então de $(*)$ temos $f(3) = 2$. Substituindo n por 3 na equação original, obtemos $f\big(f(3)\big) + f(3) = 2.3 + 3 \Rightarrow f(2) = 7$, e substituindo n por 2 na equação original, obtemos $f\big(f(2)\big) + f(2) = 2.2 + 3 \Rightarrow f(7) = 0$, um absurdo, já que $0 \notin CDom(f)$.

Se $f(1) = 1$, de $(*)$ temos $f(1) + 1 = 5 \Rightarrow f(1) = 4$, um absurdo.

Portanto, $f(1) = 2$, e de $(*)$, $f(2) = 3$. O interessante é que se substituirmos $n = 2$ na equação original, obteremos $f(3) = 4$. Isso parece um padrão, não? Será que dá para provarmos que $f(n) = n + 1$, para todo n natural?

Se o domínio fosse o conjunto dos reais, teríamos mais dificuldade, mas o bom de termos $Dom(f) = \mathbb{N}$ é que podemos aplicar indução, e essa é uma arma fortíssima para se resolver equações funcionais com domínio natural (e até mesmo inteiro ou racional). Provaremos por indução em n que $f(n) = n + 1$.

O caso inicial $n = 1$ já foi feito acima. Suponha que $f(k) = k + 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Nosso objetivo é provar que $f(k+1) = k + 2$. Para tanto, substitua n por k na equação original:

$$f\big(f(k)\big) + f(k) = 2k + 3 \Rightarrow f(k+1) + k + 1 = 2k + 3 \Rightarrow f(k+1) = k + 2$$

E o resultado segue por indução. Portanto, $f(n) = n + 1$, para todo n natural. Testando a função:

$$f\big(f(n)\big) + f(n) = 2n + 3 \Leftrightarrow f(n+1) + n + 1 = 2n + 3 \Leftrightarrow$$

$$\big((n+1) + 1\big) + n + 1 = 2n + 3 \Leftrightarrow 2n + 3 = 2n + 3\ (OK!)$$

Conclusão: $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ∎

Para finalizar, deixamos uma lista com 42 problemas de olimpíadas, distribuídos mais ou menos em ordem crescente de dificuldade. Se você não conseguir resolver de cara essas questões, não se preocupe! Resolver problemas de equações funcionais consiste em tentar várias substituições, encontrar várias equações inúteis no meio do caminho, até encontrar aquela que nos trará avanços. Repetindo o que foi dito na introdução: treino (muito treino!) e mente aberta. Isso é tudo o que você vai precisar para resolver esses problemas.

5. Problemas

Problema 1 (OBM/2001 – 2ª Fase): Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$, para todos os reais x e y.

Problema 2 (Inglaterra/96): Uma função f definida nos inteiros positivos satisfaz $f(1) = 1996$ e além disso:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 . f(n);\ n > 1$$

Calcule $f(1996)$.

Problema 3 (Itália/96): Seja f uma função dos reais nos reais, tal que para qualquer real x:

(a) $f(10 + x) = f(10 - x)$
(b) $f(20 + x) = -f(20 - x)$

Prove que f é ímpar e periódica.

Problema 4 (OBM/2005 - 2ª Fase): A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a equação $f(x + f(y)) = x + f(f(y))$ para todos os números reais x e y. Sabendo que $f(2) = 8$, calcule $f(2005)$.

Problema 5 (Balcânica/87): Seja a um número real e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x)$;

(b) $f(0) = \frac{1}{2}$

Prove que a função f é constante.

Problema 6 (Irlanda/95): Determine todas as funções f de reais em reais que satisfazem a equação funcional:

$$x.f\ (x) - y.f\ (y) = (x - y).f\ (x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 7 (Czech-Slovak Match/1997): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 8 (Austrália/91): Mostre que existe precisamente uma função f que está definida para todos os reais diferentes de zero, satisfazendo:

(a) $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$
(b) $f(x) + f(y) = 1 + f(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}^*$, com $x + y \neq 0$.

Problema 9 (Ibero/87): Ache todas as funções f definidas em $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ tomando valores em reais, tais que:

$$[f(x)]^2.f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x, \forall x \neq 0,1,-1$$

Problema 10 (Austrália/95): Determine todas as funções $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tais que $f(1) = \frac{1}{2}$ e que:

$$f(xy) = f(x).f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y).f\left(\frac{3}{x}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

Problema 11 (Korea/97): Determine todas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfazendo:

- Para todo n natural, $f\big(n + f(n)\big) = f(n)$;
- Existe um natural n_0 tal que $f(n_0) = 1$.

Problema 12 (África do Sul/97): Encontre todas as funções $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que:

$$f\big(m + f(n)\big) = f(m) + n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Problema 13 (Espanha/98): Determine todas as funções estritamente crescentes $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tais que:

$$f\big(n + f(n)\big) = 2f(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Problema 14 (Nórdica/98): Determine todas as funções $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tais que:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y), \forall x,y \in \mathbb{Q}$$

Problema 15 (República Tcheca/96): Determine para quais inteiros k existe uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ com

- $f(1995) = 1996;$
- $f(xy) = f(x) + f(y) + k.f(\mathrm{mdc}(x,y)), \forall x,y \in \mathbb{N}$

Problema 16 (IMO/87): Existe uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo a equação $f(f(n)) = n + 1987, \forall n \in \mathbb{N}$?

Problema 17 (Ibero/93): Determine todas as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que:

- Se $x < y$, então $f(x) < f(y)$;
- $f(yf(x)) = x^2 f(xy), \forall x,y \in \mathbb{N}$

Problema 18 (IMO/2008): Determine todas as funções $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ tais que:

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

Para todos os reais positivos w, x, y, z satisfazendo $wx = yz$.

Problema 19 (Balcânica/2000): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y, \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Problema 20 (IMO/86): Determine todas as funções $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tais que:

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y), \forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$
(ii) $f(2) = 0$
(iii) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

Problema 21 (IMO/92): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2, \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Problema 22 (Teste IMO - Argentina/2010): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right), \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Problema 23: Existe uma função limitada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou seja, existe um número $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para todo $x \in \mathbb{R}$) tal que $f(1) = 1$ e que, para todo número real x, tem-se $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$?

Problema 24 (Austrália/98): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

- $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$;
- $f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) + 2xy - 2000, \forall x, y \in \mathbb{R}^*$ com $x + y \neq 0$.

Problema 25 (Lista IMO/2009): Ache todas as funções $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ tais que:

- $f(1) = 2008$;
- $|f(x)| \leq x^2 + 1004^2$;
- $f\left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + f\left(y + \frac{1}{x}\right)$

Problema 26 (Japão/2006): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$\left(f(x)\right)^2 + 2yf(x) + f(y) = f\left(y + f(x)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 27 (Banco IMO/2000): Determine todos os pares de funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f\left(x + g(y)\right) = xf(y) - yf(x) + g(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 28 (Banco IMO/2002): Ache todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 29 (Banco IMO/2005): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com:

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 30 (IMO/1999): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f\left(x - f(y)\right) = f\left(f(y)\right) + xf(y) + f(x) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 31 (Banco IMO/2009): Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Prove que existem números reais x, y tais que $f\left(x - f(y)\right) > yf(x) + x$.

Problema 32 (Banco IMO/2011): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos os reais x, y, temos que:

$$f\left(xf(x + y)\right) = f\left(yf(x)\right) + x^2$$

Problema 33 (Banco IMO/2011): Determine todos os pares de funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$g\left(f(x + y)\right) = f(x) + (2x + y)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 34 (OBM/1998): Determine todas as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que:

$$f\left(2f(x)\right) = x + 1998, \forall x \in \mathbb{N}$$

Problema 35 (IMO/2009): Determine todas as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todos os inteiros positivos a e b, existe um triângulo não degenerado com lados de comprimentos a, $f(b)$ e $f(b + f(a) - 1)$.

Problema 36 (Japão/2013): Determine todas as funções $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(m) + f(n) = f(mn) + f(m + n + mn), \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Problema 37 (Teste IMO/2008): Considere todas as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que:

$$f(m + n) \geq f(m) + f\big(f(n)\big) - 1$$

Para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Ache os possíveis valores de $f(2008)$.

Problema 38 (Banco IMO/2010): Ache todas as funções $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tais que:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy), \forall x, y \in \mathbb{Q}^+$$

Problema 39 (IMO/2012): Encontre todas as funções $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para todos os inteiros *a*, *b*, *c* satisfazendo $a + b + c = 0$, a seguinte igualdade é válida:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

Problema 40 (OBM/2006): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f\big(xf(y) + f(x)\big) = 2f(x) + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 41 (IMO/2010): Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 42 (USAMO/2000): Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *muito convexa* se:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x + y}{2}\right) + |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Prove que não existe nenhuma função muito convexa.