Pulo de Vieta

Prof. Davi Lopes – OBM

22ª Semana Olímpica – Anápolis – 25/01/2019

A ideia principal do pulo de Vieta é gerar uma nova solução (x', y') a partir de uma dada solução (x, y) (por isso o nome "pulo": você pula de uma solução para outra!). Existem diversas formas de se gerar essa solução adicional: olhar as relações de soma e produto numa equação do segundo grau, ou usar algum elemento de simetria característica do problema.

Além disso, outra utilidade do pulo de Vieta é mostrar que uma determinada equação não possui solução. Para tanto, você supõe a existência de uma solução minimal (solução essa que minimiza algo, como a soma das variáveis, por exemplo), e prova que existe uma solução "menor", gerando um absurdo.

Para se acostumar com essa técnica, é preciso fazer muitos exercícios, e os problemas a seguir estão aí para isso. Divirtam-se!

Problema 1: Se a, b, q são inteiros positivos, tais que $q = \frac{a^2+b^2}{ab-1}$, prove que $q = 5$.

Problema 2: Demonstre que não existem inteiros positivos x, y, n tais que eles satisfaçam $x^2 + y^2 = n(x+1)(y+1)$.

Problema 3: Sejam x, y naturais tais que $xy | x^2 + y^2 + 1$. Prove que $\frac{x^2+y^2+1}{xy} = 3$.

Problema 4 (Putnam): Prove que, para todo número real N, a equação:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_1x_2x_3$$

Possui uma solução na qual x_1, x_2, x_3, x_4 são todos inteiros maiores que N.

Problema 5 (IMO/1981): Determine o maior valor possível de $m^2 + n^2$, onde m, n são inteiros positivos menores ou iguais a 1981, tais que $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

Problema 6: Determine todos os inteiros positivos m, n tais que $m | n^2 + 1$e $n | m^2 + 1$.

Problema 7: Ache todos os possíveis valores de $k \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{a^2+b^2+ab}{ab-1} = k$ $(a, b \in \mathbb{N})$

Problema 8: Ache todos os possíveis valores de $k \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{a^2+b^2-1}{ab} = k$ $(a, b \in \mathbb{N})$

Problema 9 (IMO/1988): Sejam a, b inteiros positivos tais que $ab + 1$ divide $a^2 + b^2$. Prove que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um quadrado perfeito.

Problema 10: Se a, b, c são inteiros positivos tais que $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$, demonstre que $a^2 + b^2 - abc$ é um quadrado perfeito.

Problema 11: Sejam m, n, k inteiros positivos satisfazendo $k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4}$. Prove que k é quadrado perfeito.

Problema 12 (Romênia/2005): Determine todas as quádruplas de inteiros positivos (a, b, m, n) tais que:

$$a^m b^n = (a+b)^2 + 1$$

Problema 13: Sejam m, n inteiros com mesma paridade, tais que $m^2 - n^2 + 1$ divide $n^2 - 1$. Prove que $m^2 - n^2 + 1$ é um quadrado perfeito.

Problema 14 (IMO/2003): Determine todos os pares de inteiros positivos (a, b) tais que $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ é um inteiro positivo.

Problema 15 (IMO/2007): Dados os inteiros positivos a, b, prove que $\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$ é um inteiro se, e somente se, $a = b$.

Problema 16: Prove que, para todo inteiro positivo m, existem infinitos inteiros positivos (x, y) tais que:

- x, y são distintos;
- $x|y^2 + m$ e $y|x^2 + m$.

Problema 17 (Rioplatense/2017): Mostre que existem infinitos pares de inteiros positivos (m, n), com $m < n$, tais que:

$$m|n^{2016} + n^{2015} + \cdots + n + 1 \text{ e } n|m^{2016} + m^{2015} + \cdots + m + 1$$

Problema 18 (IMC/2018 - generalização): Determine todos os pares de polinômios de coeficientes complexos (P, Q) (mônicos ou não) tais que $P|Q^2 + 1$ e $Q|P^2 + 1$.

Problema 19: Determine todos os pares de polinômios (P, Q) em $\mathbb{C}[x]$ satisfazendo $PQ + 1|P^2 + Q^2$.

Problema 20: Demonstre que se x, y, z são números inteiros positivos, então o produto $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ é quadrado perfeito se, e somente se, $xy+1, yz+1, zx+1$ são todos quadrados perfeitos.