Teoria dos Números na confluência da Álgebra, Análise e Combinatória

Problema 1. (USAMO 2013) Dados inteiros positivos m e n, prove que existe um inteiro positivo c tal que os números cm e cn têm o mesmo número de ocorrências de cada dígito não nulo quando escritos na base 10.

Teorema de Minkowski

Teorema 1. (Minkowski) Seja A um conjunto convexo limitado em R^n, simétrico em relação à origem e com volume maior que 2^n. Existe então um ponto do reticulado em A diferente da origem.

Problema 2. (Kömal) Seja n um inteiro positivo tal que a equação $x^2 + xy + y^2 = n$ tem soluções racionais. Então a equação também possui soluções inteiras.

Álgebra

Problema 3. (American Mathematical Monthly) Prove que para quaisquer inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o número

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_j - a_i}{j - i}$$

é um inteiro.

Problema 4. (American Mathematical Monthly) Considere a sequência $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 3$ e $x_{n+4} = x_{n+1} + x_n$. Prove que para qualquer primo p o número x_p é múltiplo de p.

Problema 5. (China TST 2005) Prove que o número

$$\sqrt{1001^2 + 1} + \sqrt{1002^2 + 1} + \cdots + \sqrt{2000^2 + 1}$$

é irracional.

Problema 6. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k$ reais positivos tais que $\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_n}$ é um número racional para todo $n \geq 2$. Prove que $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$.

Problema 7. (Schur) Seja $f \in Z[X]$ um polinômio não constante. Então o conjunto de números primos que dividem pelo menos um dos números não nulos dentre

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

é infinito.

Problema 8. Sejam $f, g \in Z[X]$ polinômios mônicos irredutíveis e não constantes tais que para todo n suficientemente grande, $f(n)$ e $g(n)$ têm o mesmo conjunto de divisores primos. Prove que $f = g$.

Problema 9. Seja $f \in Z[X]$ um polinômio não constante, e seja $k \geq 2$ um inteiro tal que $\sqrt[k]{f(n)} \in Z$ pra todo inteiro positivo n. Prove que existe um polinômio $g \in Z[X]$ tal que $f = g^k$.

Problema 10. Sejam $f, g \in Z[X]$ dois polinômios não constantes tais que $f(n)|g(n)$ para infinitos n. Prove que f divide g em $Q[X]$.

Problema 11. (IMO 2002) Encontre todos os pares de inteiros positivos $m, n \geq 3$ para os quais existem infinitos inteiros positivos a tais que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

é um inteiro.

Análise

Teorema 2. (Kronecker) Para qualquer a irracional a sequência $(\{na\})_{n\geq 1}$ é densa em $[0, 1]$.

Problema 12. (Romênia TST 2003) Prove que a sequência $(\lfloor n\sqrt{2003} \rfloor)_{n\geq 1}$ contém progressões aritméticas arbitrariamente longas com razões arbitrariamente grandes.

Problema 13. (Mathlinks Contest - Gabriel Dopinescu) Considere um inteiro positivo k e um número real a tais que $\log a$ é irracional. Para cada $n \geq 1$ seja x_n o número formado pelos primeiros k dígitos de $\lfloor a^n \rfloor$. Prove que a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ não é eventualmente periódica.

Problema 14. (Romênia TST 2010) Seja $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n. Dado um inteiro positivo a, prove que $\sigma(am) < \sigma(am + 1)$ para infinitos inteiros positivos m.

Problema 15. (Putnam 2016) Definimos um inteiro positivo n como *meio quadrado* se n é um quadrado perfeito ou a distância de n para um quadrado perfeito mais próximo é um quadrado perfeito. Por exemplo, 2016 é meio quadrado, porque o quadrado perfeito mais próximo de 2016 é $45^2 = 2025$ e $2025 - 2016 = 9$ que é um quadrado perfeito.

Dado um inteiro positivo N, seja $S(N)$ o número de inteiros meio quadrados entre 1 e N, inclusive. Encontre constantes positivas α e β tais que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S(N)}{N^\alpha} = \beta$$

ou mostre que tais constantes não existem.

Combinatória

Teorema 3. (Turán) O maior número de arestas que um grafo sem k-clique de n vértices pode ter é

$$\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2},$$

onde r é o resto de n dividido por $k - 1$.

Problema 16. (IMO 2003) Seja A um subconjunto do conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ com exatamente 101 elementos. Prove que existem $t_1, t_2, \ldots, t_{100} \in S$ tais que os conjuntos $A_j = \{x + t_j | x \in A\}$ são disjuntos dois a dois.

Problema 17. (American Mathematical Monthly) Sejam n e k inteiros não negativos. Mostre que o número de partições de n com k partes pares é a mesma que o número de partições de n tais que a maior parte repetida é k (definido como 0 se todas as partes são distintas). Por exemplo, 7 tem 3 partições com 2 partes pares $(4 + 2 + 1 = 3 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1)$ e 3 partições tais que a maior parte repetida é 2 $(3 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1)$.

Problema 18. (IMO 1995) Seja p um primo ímpar. Quantos subconjuntos A de p elementos de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ existem tais que a soma dos elementos é divisível por p?

Problema 19. (Putnam 2017) Encontre o número de tuplas ordenadas $(x_0, x_1, \ldots, x_{63})$ tais que $x_0, x_1, \ldots, x_{63}$ são elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$ e

$$x_0 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 63x_{63}$$

é divisível por 2017.