Sobre dígitos e números não sei o quê

Diego Eloi

1 de janeiro de 2019

Para resolver problemas que envolvem dígitos, normalmente utilizamos a estratégia de separar em classes decimais, por exemplo, se o número tiver 3 dígitos:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

Onde $0 \leq a, b, c \leq 9$, com $a \neq 0$. Essa é uma ideia boa e pode funcionar por si só, mas normalmente precisamos associar a esta outras ideias, como divisibilidade, congruências e propriedades sobre divisores dos números. Vejamos um exemplo abaixo:

Exemplo 1 Chamaremos de *imagem* de um número natural de dois algarismos o número que se obtém trocando a ordem de seus algarismos. Por exemplo, a imagem de 34 é 43. Quais são os números de dois algarismos que somados com sua imagem resultam em um quadrado perfeito?

Solução: Se $\overline{AB}$, sua imagem é $\overline{BA}$. Usando a representação decimal, temos a seguinte equação:

$$N = \overline{AB} + \overline{BA} = 10A + B + 10B + A = 11(A + B)$$

Logo, para que encontremos os números que satisfazem o que é pedido, como N deve ser quadrado perfeito, $A + B$ deve ser múltiplo de 11 e como A e B são dígitos, $A + B = 11$. Assim, basta fazer alguns casos: $A = 2 \Rightarrow B = 9$, $A = 3 \Rightarrow B = 8$, $A = 4 \Rightarrow B = 7$, $A = 5 \Rightarrow B = 6$ e depois disso é só trocar os dois algarismos de lugar.

Um dos propósitos principais deste material é resolvermos o problema 2 da OBM nível 2:

Problema 2 OBM N2 Uma quádrupla é dita ser *dobarulho* quando A, B e C são algarismos não nulos e D um inteiro positivo, tais que:
$A \leq 8$
$D > 1$
D divide os seis números de três dígitos: $ABC, BCA, CAB, (A+1)CB, CB(A+1), B(A+1)C$.

Determine todas as quádruplas dobarulho.

No problema acima, vemos que não há uma barra acima das letras, porém, implicitamente já há a informação de que A, B e C são **dígitos** ou **algarismos**. Em geral os números podem vir ou não com a barra acima, desde que esteja claro que as letras são algarismos, para que não venhamos a confundir com multiplicações. Uma observação importante é que **D não é um dígito!**.

Os critérios de divisibilidade são bem conhecidos por vocês e somente com eles já poderemos resolver alguns exercícios:

Problema 1 (OCM/86) Determine todos os pares ordenados (x, y) de modo que o número $75x4y$ seja divisível por 5 e por 9.

Problema 2 Determinar os algarismos x e y de modo que o número $34xx58y$ seja divisível por 9 e por 11.

Problema 3 Determinar os algarismos x e y de modo que o número $8x5y$ seja divisível por 5 e por 11.

Problema 4 (OCM/98) Determine todos os inteiros positivos N de três dígitos tais que N e a soma dos seus dígitos seja divisível por 11.

Problema 5 (Teste da Rioplatense - Fortaleza)

Vamos agora relembrar uma propriedade importante sobre os divisores de números naturais. Dado N um número natural, sabemos que ele pode ser escrito, de modo único, como $N = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} ... P_k^{\alpha_k}$, onde $P_1, P_2, ..., P_k$ são os divisores primos de N e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k > 0$ são os expoentes das potências de primos. Dessa maneira, temos que o número de divisores positivos de N é dado por $(\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$.

Problema 6 Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é *poderoso* se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

Problema 7 Dizemos que dois ou mais números são *irmãos* quando têm exatamente os mesmos fatores primos. Por exemplo, os números $10 = 2.5$ e $20 = 2^2.5$ são irmãos, pois têm 2 e 5 como seus únicos fatores primos. O número 60 tem quantos irmãos menores do que 1000?

Problema 8 Dizemos que um número natural é *teimoso* se, ao ser elevado a qualquer expoente inteiro positivo, termina com o mesmo algarismo. Por exemplo, 10 é teimoso, pois $10^2, 10^3, 10^4...$ são números que também terminam em zero. Quantos números naturais teimosos de três algarismos existem?

Problema 9 Um inteiro positivo é chamado de *verdoso* se pode ser escrito como soma de duas ou mais potências distintas de base 3 e exponente positivo. Por exemplo, $12 = 3^2 + 3^1$ é um número verdoso, mas $18 = 3^2 + 3^2$ não é. Quais números inteiros positivos menores que 120 são verdosos?

Problema 10 (Maio N1) Dizemos que um número é *supersticioso* quando o mesmo é igual a 13 vezes a soma dos seus dígitos. Encontre todos os números supersticiosos.

Problema 11 (OBMN1 - 3º Fase) Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $7 \times 28694 = 100858$.
a) Mostre que 17 é garboso.
b) Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

Problema 12 (OBMN2 - 2º Fase) Um número de 4 algarismos $\overline{abcd}$ é chamado de *legal* quando a soma dos números formados pelos dois primeiros e pelos dois últimos algarismos é igual ao número formado pelos algarismos centrais (ou seja, $ab + cd = bc$). Por exemplo, 2307 é um número legal pois $23 + 07 = 30$.
(a) Qual é o menor número legal maior do que 2307?
(b) Quantos são os números legais de 4 algarismos?

O que veremos aqui é mais um formalização dos conceitos que já foram estudados. Dizemos que um inteiro não-nulo a divide um inteiro positivo b, e escrevemos $a|b$ quando b for um múltiplo de a, ou seja, quando a for um divisor de b. Em outras palavras, $a|b \Leftrightarrow \exists c \in Z; b = a.c.$

Exemplos: Temos que $3|15$, pois $15 = 3.5$, porém, 4 não divide 50, pois $50 = 2.5^2$.

Existem algumas propriedades importantes de divisibilidade:
(i) Se $a|b$, então $|a| \leq |b|$;
(ii) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b + c$;
(iii) Se $a|b$, então $a|b.c$, para qualquer $c \in Z$;
(iv) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;
(v) Se p é um número primo e $p|ab$, com $mdc(a, b) = 1$, então $p|a$ ou $p|b$.

Observações: Juntando as propriedades (ii) e (iii), vemos que se $a|b$ e $a|c$, então $a|bx + cy$, para quaisquer $x, y \in Z$.

Com as propriedades acima em mãos, podemos resolver o problema 2 do nível 2 da OBM de 2018. Vamos lá!