Pot-pourri das diofantinas

Diego Eloi

2 de janeiro de 2019

As equações diofantinas são bem conhecidas, principalmente por vocês, alunos do nível 2 da OBM. Essas equações podem ser simples de resolver usando conceitos básicos de divisibilidade ou congruência, mas podem também ser um pouco mais complicadas de resolver. Para resolver os problemas abaixo, precisaremos de fatos simples como fatoração única em fatores primos, como estratégias um pouco mais complicadas como o lema do levantamento do expoente, lema de Thue e etc. Dado isso, relembraremos aqui alguns teoremas básicos de teoria dos números e resolveremos alguns problemas!

Teorema de Bézout: Sejam a e b inteiros positivos. Então, existem x e y inteiros tais que

$$ax + by = mdc(a, b)$$

Pequeno Teorema de Fermat: Sejam p primo e $a \in N$. Então:

$$a^p \equiv a(modp)$$

Caso $mdc(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1(modp)$.

Teorema de Euler: Sejam $a, n \in N$ tais que $mdc(a, n) = 1$. Então:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(modn)$$

Obs: veja que Fermat é um caso particular de Euler, pois quando $n = p \Rightarrow \varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$.

Lema do Levantamento do expoente: Seja p primo e x, y inteiros com $mdc(p, x) = mdc(p, y) = 1$. Então, vale:
(i) Se $p \neq 2$ e $p|x - y$, então:

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$$

(ii) Se $p \neq 2$, n ímpar e $p|x + y$, então:

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n)$$

(iii) Se $p = 2$, então:

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$$

Lema de Thue: Seja p um primo e a um inteiro tal que $mdc(a, p) = 1$. Então, existem inteiros x e y tais que $ax \equiv y (mod\ p)$ com $0 < |x|, |y| < \sqrt{p}$.

Problema 1 (Balcânica Júnior) Determine todos os a, b inteiros positivos tais que $a^4 + 4b^4$ é um número primo.

Problema 2 (Balcânica Júnior) Determine todos os p, q primos tais que $p^2(p^3 - 1) = q(q + 1)$.

Problema 3 (Rioplatense 2000) Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação:

$$1 + 2^x + 3^y = z^3$$

Problema 4 (Índia 1995) Encontre todos os inteiros positivos x, y para os quais $7^x - 3^y = 4$.

Problema 5 (IMO/97) Encontre todos os pares de inteiros (a, b), com $a, b \geq 1$ que satisfazem a equação:

$$a^{b^2} = b^a$$

Dica: Mostre que, para $n \geq 2$, vale que $n^{k-2} > k, \forall k \in N, k \geq 5$ e que $n^{2k-1} > k, \forall k \in N$.

Problema 6 Determine todos os pares de números naturais (m, n) tais que $m^2 = nk + 2$ e $k = \overline{1n}$.

Problema 7 (USAMO 76) Encontre todas as soluções naturais da equação

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$$

Problema 8 Seja n um inteiro. Prove que se $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ é um inteiro, então ele é um quadrado perfeito.

Problema 9 Sejam m e n inteiros positivos com $m, n \geq 2$. Encontre todos os pares de inteiros positivos (x, y) que são solução da equação

$$x^n + y^n = 3^m$$

Problema 10 Seja k um inteiro positivo. Encontre todos os inteiros positivos n tais que

$$3^k = 2^n - 1$$

Problema 11 (Polônia 2010) Sejam $q > p > 2$ números primos. Mostre que $2^{pq} - 1$ tem pelo menos 3 fatores primos distintos.

Problema 12 (OBM) Mostre que não existem inteiros positivos x e y tais que

$$x^3 + y^3 = 2^{2009}$$

Problema 13 (Teste CS) Encontre todas as quádruplas (x, y, z, k) de números inteiros, com $x, y, z > 0$ e $k \geq 0$, tais que

$$x^6 + y^6 + z^6 = 4826.7^k$$

Problema 14 (OBM - 2007) Mostre que não existem soluções inteiras positivas para a equação $3^m + 3^n + 1 = t^2$