Melhor solução Problema 5 – Nível 3 – OBM 2018

Gabriel Marques Domingues (com pequenos acertos e uma generalização)

Vamos nos atentar apenas para uma faixa $10^k < n < 10^{k+1}$ para k muito grande. Temos:

$$a_{10^k+m} = a_{10^k+m-1} \cdot 10^{k+1} + 10^k + m$$

Seja $10^{k+1} \equiv \alpha \pmod 7$ e $a_{10^k} \equiv a \pmod 7$

$$a \to \alpha a + 1 + 10^k \to \alpha^2 a + \alpha + 2 + 10^k\,(1+\alpha)$$
$$\to \alpha^3 a + \alpha^2 + 2\alpha + 3 + 10^k(1+\alpha+\alpha^2) \to \cdots$$
$$\alpha^6 a + (\alpha^5 + 2\alpha^4 + 3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha + 6) + 10^k(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^5)$$

Temos $\alpha^6 \equiv 1 \pmod 7$ $\{\varphi(7) = 6\}$

$$\alpha^5 + 2\alpha^4 + 3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha + 6$$
$$\equiv \alpha^5 - 5\alpha^4 + 10\alpha^3 - 10\alpha^2 + 5\alpha - 1 \pmod 7$$
$$\equiv (\alpha - 1)^5 \pmod 7$$

Supondo $\alpha \neq 1$: $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^5 \equiv 0 \pmod 7$

$$\left\{\equiv \frac{\alpha^6 - 1}{\alpha - 1}\right\}$$

Logo $a_{10^k+6} \equiv a + (\alpha - 1)^5 \pmod 7$ e $a_{10^k+6l} \equiv a + l(\alpha-1)^5 \pmod 7$, l inteiro positivo. Lembrando que $\mathbb{Z}_7$ é um corpo, existe l tal que $a_{10^k+6l} \equiv a + l(\alpha - 1)^5 \equiv 0 \pmod 7$.

Tal abordagem pode ser generalizada. De fato, para p primo, podemos mostrar que, sendo $10^{k+1} \equiv \alpha \pmod p$ e $\alpha \not\equiv 1$:

$$a_{10^k+(p-1)} \equiv a_{10^k} + (\alpha - 1)^{p-2} \equiv a_{10^k} + (\alpha - 1)^{-1} \pmod p$$

O que resolve problema para p primo exceto nos casos 2, 3 e 5. Que são facilmente tratados separadamente. Vamos mostrar esse fato mais geral.
Iterando a recursão, obtemos:

$$a_{10^k+(p-1)} \equiv \alpha^{p-1} a_{10^k} + (\alpha^{p-2} + 2\alpha^{p-3} + 3\alpha^{p-4} + \cdots + (p-1))$$
$$+ 10^k(\alpha^{p-2} + \alpha^{p-3} + \cdots + 1) \Leftrightarrow$$
$$a_{10^k+(p-1)} \equiv a_{10^k} + \left(\frac{\alpha^p - \alpha}{\alpha - 1} - (p-1)\right) \cdot \frac{1}{\alpha - 1} + 10^k\left(\frac{\alpha^{p-1} - 1}{\alpha - 1}\right) \Leftrightarrow$$
$$a_{10^k+(p-1)} \equiv a_{10^k} + (\alpha - 1)^{-1} \pmod p$$

(Com um raciocínio similar, podemos mostrar que, para $10^{k+1} \equiv 1 \pmod p$, $a_{10^k+p} \equiv a_{10^k}$.)
Essa fórmula também pode ser obtida com o auxílio de uma recursão linear homogênea para a sequência, supondo que os termos envolvem números com a mesma quantidade k de dígitos:

$$a_{n+3} = (10^k + 2)a_{n+2} - (2 \cdot 10^k + 1)a_{n+1} + 10^k a_n$$

As raízes da equação característica dessa recursão são 1 (raiz dupla) e 10^k, ou seja,

$$a_{10^{k-1}+n} = A\left(10^k\right)^n + B(n) + C,$$

em que $B = \frac{1}{1-10^k}$, $C = -\frac{10^{k-1}(10^k+9)}{\left(1-10^k\right)^2}$ e $A = a_{10^{k-1}} - C$.
Obtemos, dessa maneira, outra possível solução. Mostrar que, sob certas condições, a equação $a_{10^{k-1}+n} = A\left(10^k\right)^n + B(n) + C \equiv 0 \pmod p$ é solúvel.

Outra maneira de atacar o problema (meio trabalhosa)

Outra abordagem bastante elucidativa é buscar uma fórmula fechada para $S_k = \underbrace{10\ldots0}_{k}\underbrace{10\ldots01}_{k}\underbrace{10\ldots02}_{k}\ldots\underbrace{99\ldots98}_{k}\underbrace{99\ldots99}_{k}$, o número obtido justapondo-se todos os números de k dígitos. A determinação de uma fórmula fechada para S_k é muito útil no problema, pois $a_{10^k-1} = 10^{k(10^k-10^{k-1})} \cdot a_{10^{k-1}-1} + S_k$ e temos a recursão módulo p citada acima para tratar os demais casos.

Então:

$$S_k = 10^{k-1} \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1}-1)} + (10^{k-1}+1) \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1}-2)} + \cdots + (10^k-1) \cdot 10^{k\cdot 0} \Leftrightarrow$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{10^k-10^{k-1}-1} (10^{k-1}+i) \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1}-1-i)}$$

Assim:

$$10^k \cdot S_k = \sum_{i=0}^{10^k-10^{k-1}-1} (10^{k-1}+i) \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1}-i)} =$$

$$10^{k-1} \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1})} + \sum_{i=0}^{10^k-10^{k-1}-2} (10^{k-1}+i+1) \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1}-1-i)}$$

E

$$(10^k-1) \cdot S_k = 10^{k-1} \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1})} - (10^k-1) + \sum_{i=0}^{10^k-10^{k-1}-2} 10^{k(10^k-10^{k-1}-1-i)}$$

$$\Leftrightarrow (10^k-1) \cdot S_k = 10^{k-1} \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1})} - (10^k-1) + \sum_{i=1}^{10^k-10^{k-1}-1} 10^{ki}$$

$$\Leftrightarrow (10^k-1) \cdot S_k = 10^{k-1} \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1})} - (10^k-1) + \frac{10^{k(10^k-10^{k-1})} - 10^k}{10^k-1}$$

$$\Leftrightarrow (10^k-1)^2 \cdot S_k = (10^{2k-1} - 10^{k-1} + 1) \cdot 10^{k(10^k-10^{k-1})} - (10^k-1)^2 - 10^k$$

Como $10^k \equiv 10^{k-1} \equiv 4 \pmod 6$, para $k > 1$, e $10^6 \equiv 1 \pmod 7$:

$$(10^k-1)^2 \cdot S_k \equiv (10^{2k-1} - 10^{k-1} + 1) - (10^k-1)^2 - 10^k \pmod 7$$

Para os próximos passos, iremos utilizar que, módulo 7: $10^{6n+1} \equiv 3$, $10^{6n+2} \equiv 2$, $10^{6n+3} \equiv 6$, $10^{6n+4} \equiv 4$, $10^{6n+5} \equiv 5$.

Consequentemente, para k não divisível por 6:

$$S_k \equiv 5 \cdot 10^{k-1}(10^k-1)^{-1} \equiv 10^{k+4}(10^k-1)^{-1} \pmod 7$$

E, portanto, para $k > 1$ e não divisível por 6:

$$a_{10^k-1} = 10^{k(10^k-10^{k-1})}a_{10^{k-1}-1} + S_k \Longrightarrow a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} + 10^{k+4}\left(10^k - 1\right)^{-1}$$

Considerando, então, que $a_{10-1} = a_9 \equiv 1 \pmod 7$:

$$a_{10^2-1} \equiv a_{10-1} + 10^6 \cdot (10^2-1)^{-1} \equiv 1 + 1 \cdot (10^2-1)^{-1} \equiv 1 + 1 \cdot (2-1)^{-1} \equiv 2;$$
$$a_{10^3-1} \equiv a_{10^2-1} + 10^7 \cdot (10^3-1)^{-1} \equiv 2 + 10 \cdot (10^3-1)^{-1} \equiv 2 + 3 \cdot (6-1)^{-1} \equiv 4;$$
$$a_{10^4-1} \equiv a_{10^3-1} + 10^8 \cdot (10^4-1)^{-1} \equiv 4 + 10^2 \cdot (10^4-1)^{-1} \equiv 4 + 2 \cdot (4-1)^{-1} \equiv 0;$$
$$a_{10^5-1} \equiv a_{10^4-1} + 10^9 \cdot (10^5-1)^{-1} \equiv 0 + 10^3 \cdot (10^5-1)^{-1} \equiv 0 + 6 \cdot (5-1)^{-1} \equiv 5.$$

Para determinarmos a_{10^6-1} não podemos usar a recursão obtida para tais termos, porém, utilizando a recursão original:

$$a_{10^5+m} = a_{10^5+m-1} \cdot 10^6 + 10^5 + m \equiv a_{10^5+m-1} + 5 + m \pmod 7$$

Assim:

$$a_{10^5} \equiv a_{99999} + 5 \equiv 5 + 5 \equiv 3 \pmod 7;$$
$$a_{10^5+1} \equiv a_{10^5} + 6 \equiv 3 + 2 \equiv 5 \pmod 7;$$
$$a_{10^5+2} \equiv a_{10^5+1} + 7 \equiv 2 + 0 \equiv 2 \pmod 7;$$
$$a_{10^5+3} \equiv a_{10^5+2} + 8 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \pmod 7;$$
$$a_{10^5+4} \equiv a_{10^5+3} + 9 \equiv 3 + 2 \equiv 5 \pmod 7;$$
$$a_{10^5+5} \equiv a_{10^5+4} + 10 \equiv 5 + 3 \equiv 1 \pmod 7;$$
$$a_{10^5+6} \equiv a_{10^5+5} + 11 \equiv 1 + 4 \equiv 5 \pmod 7;$$
$$a_{10^5+7} \equiv a_{10^5+6} + 12 \equiv 5 + 5 \equiv 3 \equiv a_{10^5} \pmod 7.$$

Logo temos caracterizado um período e, como, $10^6 - 1 \equiv 0 \equiv 10^5 + 2 \pmod 7$:

$$a_{10^6-1} \equiv a_{10^5+2} \equiv 2 \pmod 7$$

Voltando à recursão para os termos a_{10^k-1}:

$$a_{10^7-1} \equiv a_{10^6-1} + 10^{11} \cdot (10^7-1)^{-1} \equiv 2 + 10^5 \cdot (10-1)^{-1} \equiv 2 + 5 \cdot (3-1)^{-1} \equiv 1;$$
$$a_{10^8-1} \equiv a_{10^7-1} + 10^{12} \cdot (10^8-1)^{-1} \equiv 1 + 1 \cdot (10^2-1)^{-1} \equiv 1 + 1 \cdot (2-1)^{-1} \equiv 2.$$

Completando o período, o que nos permite afirmar que:

$$a_{10^{6n}-1} \equiv 2, a_{10^{6n+1}-1} \equiv 1, a_{10^{6n+2}-1} \equiv 2, a_{10^{6n+3}-1} \equiv 4, a_{10^{6n+4}-1} \equiv 0, a_{10^{6n+5}-1} \equiv 5.$$

Ou seja, a partir da recursão original:

$$a_{10^{6n+6}} \equiv 0, a_{10^{6n+1}} \equiv 5, a_{10^{6n+2}} \equiv 0, a_{10^{6n+3}} \equiv 1, a_{10^{6n+4}} \equiv 4, a_{10^{6n+5}} \equiv 3.$$

Finalmente, podemos, com o auxílio da recursão obtida na melhor solução, podemos montar as tabelas a seguir que esgotam os casos do problema.

Soma 1		
5	10	10
0	11	11
5	12	12
2	13	13
4	14	14
2	15	15
6	16	16
1	17	17
6	18	18
3	19	19
5	20	20
3	21	0
0	22	1
2	23	2
0	24	3
4	25	4
6	26	5
4	27	6
1	28	7
3	29	8
1	30	9
5	31	
0	32	

Soma 3		
0	100	2
3	101	3
1	102	4
4	103	5
2	104	6
5	105	7
3	106	8
6	107	9
4	108	10
0	109	11
5	110	12
1	111	13
6	112	0
2	113	1
0	114	
3	115	

Soma 5		
1	1000	13
4	1001	14
3	1002	15
0	1003	16
3	1004	17
2	1005	18
6	1006	19
2	1007	20
1	1008	0
5	1009	1
1	1010	2
0	1011	3
4	1012	4
0	1013	5
6	1014	6
3	1015	7
6	1016	8
5	1017	9
2	1018	10
5	1019	11
4	1020	12
1	1021	
4	1022	

Soma 2		
4	10000	4
4	10001	5
5	10002	6
4	10003	7
0	10004	8
2	10005	9
6	10006	10
6	10007	11
0	10008	12
6	10009	13
2	10010	14
4	10011	15
1	10012	16
1	10013	17
2	10014	18
1	10015	19
4	10016	20
6	10017	21
3	10018	22
3	10019	23
4	10020	24
3	10021	25
6	10022	26
1	10023	27
5	10024	28
5	10025	29
6	10026	30
5	10027	31
1	10028	32
3	10029	33
0	10030	34
0	10031	35
1	10032	36
0	10033	37
3	10034	38
5	10035	39
2	10036	40
2	10037	41
3	10038	0
2	10039	1
5	10040	2
0	10041	3
4	10042	
4	10043	

Divisão por zero		
3	100000	5
2	100001	6
2	100002	0
3	100003	1
5	100004	2
1	100005	3
5	100006	4
3	100007	
2	100008	

Soma 4		
0	1000000	22
2	1000001	23
2	1000002	24
3	1000003	25
0	1000004	26
6	1000005	27
4	1000006	28
6	1000007	29
6	1000008	30
0	1000009	31
4	1000010	32
3	1000011	33
1	1000012	34
3	1000013	35
3	1000014	36
4	1000015	37
1	1000016	38
0	1000017	39
5	1000018	40
0	1000019	41
0	1000020	0
1	1000021	1
5	1000022	2
4	1000023	3
2	1000024	4
4	1000025	5
4	1000026	6
5	1000027	7
2	1000028	8
1	1000029	9
6	1000030	10
1	1000031	11
1	1000032	12
2	1000033	13
6	1000034	14
5	1000035	15
3	1000036	16
5	1000037	17
5	1000038	18
6	1000039	19
3	1000040	20
2	1000041	21
0	1000042	
2	1000043	

Vale a pena observar que nossa análise se tornou mais simples, pois, quando consideramos a equação:

$$\left(10^k-1\right)^2\cdot S_k=\left(10^{2k-1}-10^{k-1}+1\right)\cdot 10^{k\left(10^k-10^{k-1}\right)}-\left(10^k-1\right)^2-10^k$$

Podemos utilizar que $10^k \equiv 10^{k-1} \pmod{p-1}$ para $p=7$.

De fato, sempre que temos $p-1 \mid 10^k-10^{k-1} \Leftrightarrow p-1 \mid 9\cdot 10^{k-1}$ para algum k fixado, com 10^k-1 não divisível por p, podemos fazer a seguinte simplificação:

$$\left(10^k-1\right)^2\cdot S_k\equiv\left(10^{2k-1}-10^{k-1}+1\right)-\left(10^k-1\right)^2-10^k \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow \left(10^k-1\right)^2\cdot S_k\equiv\left(10^{2k-1}-10^{k-1}+1\right)-\left(10^k-1\right)^2-10^k \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow S_k \equiv -9 \cdot 10^{k-1}\left(10^k - 1\right)^{-1} \ (\mathrm{mod}\ p)$$

E, portanto, para k grande o suficiente e não divisível por $p - 1$:

$$a_{10^k-1} = 10^{k(10^k - 10^{k-1})} a_{10^{k-1}-1} + S_k \Longrightarrow a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} - 9 \cdot 10^{k-1}\left(10^k - 1\right)^{-1}$$

Para $p = 19$, por exemplo, obtemos

$$a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} + 10^k\left(10^k - 1\right)^{-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} + 1 + \left(10^k - 1\right)^{-1}$$

Há vários casos a considerar nessa recursão – 10 é uma raiz primitiva de 19 – mas ela é bastante elegante!

Faremos agora uma análise exaustiva para $p = 11$, similar à que fizemos para $p = 7$.

Para k ímpar, $k > 1$:

$$a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} - 9 \cdot 10^{k-1}\left(10^k - 1\right)^{-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1}\left((-1)^k - 1\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} + 2 \cdot 1 \cdot (-2)^{-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} + 2 \cdot 5 \equiv a_{10^{k-1}-1} - 1$$

Lembrando ainda que, para p primo, sendo $10^{k+1} \equiv \alpha\ (\mathrm{mod}\ p)$ e $\alpha \neq 1$:

$$a_{10^k + l(p-1)} \equiv a_{10^k} + l(\alpha - 1)^{p-2}\ (\mathrm{mod}\ p)$$

Ou seja, para k par, $a_{10^k+10l} \equiv a_{10^k} + l(-1-1)^{-1} \equiv a_{10^k} + 5l\ (\mathrm{mod}\ 11)$. Para k ímpar, a recursão é mais simples, $a_{10^k+11l} \equiv a_{10^k}\ (\mathrm{mod}\ 11)$.

Logo, voltando para o caso em k é par, $a_{10^k-1} = a_{10^{k-1}+9\cdot 10^{k-1}-1}$e, sabemos que $9 \cdot 10^{k-1} - 1 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11)$. Consequentemente, $a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}+1} = 10^k a_{10^{k-1}} + 10^{k-1} + 1 \Leftrightarrow a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}}$e, portanto, $a_{10^k-1} = 10^k a_{10^{k-1}-1} + 10^{k-1} \equiv a_{10^{k-1}} - 1$. Isto é, sempre é válido que $a_{10^k-1} \equiv a_{10^{k-1}} - 1$.

Assim, temos os casos iniciais:

				5				4		
1	1	1		4	10	10		8	100	100
1	2	2		4	11	0		5	101	101
2	3	3		5	12	1		9	102	102
2	4	4		7	13	2		6	103	103
3	5	5		10	14	3		10	104	104
3	6	6		3	15	4		7	105	105
4	7	7		8	16	5		0	106	106
4	8	8		3	17	6		8	107	107
5	9	9		10	18	7		1	108	108
5	10	0		7	19	8		9	109	109
6	11	1		5	20	9		2	110	0
6	12	2		4	21	10		10	111	1
7	13	3		4	22	0		3	112	2
7	14	4		5	23	1		0	113	3
8	15	5		7	24	2		4	114	4
8	16	6		10	25	3		1	115	5
9	17	7		3	26	4		5	116	6
9	18	8		8	27	5		2	117	7
10	19	9		3	28	6		6	118	8
10	20	0		10	29	7		3	119	9
0	21	1		7	30	8		7	120	10
0	22	2		5	31	9		4	121	11
				4	32	10		8	122	12
								5	123	13

É interessante notar que o primeiro múltiplo de 11 é a_{106}! Continuando.

3			2			1		
2	1000	10	10	10000	100	0	100000	10
2	1001	0	3	10001	101	0	100001	0
3	1002	1	0	10002	102	1	100002	1
5	1003	2	4	10003	103	3	100003	2
8	1004	3	1	10004	104	6	100004	3
1	1005	4	5	10005	105	10	100005	4
6	1006	5	2	10006	106	4	100006	5
1	1007	6	6	10007	107	10	100007	6
8	1008	7	3	10008	108	6	100008	7
5	1009	8	7	10009	109	3	100009	8
3	1010	9	4	10010	0	1	100010	9
2	1011	10	8	10011	1	0	100011	10
2	1012	0	5	10012	2	0	100012	0
3	1013	1	9	10013	3	1	100013	1
5	1014	2	6	10014	4	3	100014	2
8	1015	3	10	10015	5	6	100015	3
1	1016	4	7	10016	6	10	100016	4
6	1017	5	0	10017	7	4	100017	5
1	1018	6	8	10018	8	10	100018	6
8	1019	7	1	10019	9	6	100019	7
5	1020	8	9	10020	10	3	100020	8
3	1021	9	2	10021	11	1	100021	9
2	1022	10	10	10022	12	0	100022	10
2	1023	0	3	10023	13	0	100023	0
3	1024	1	0	10024	14	1	100024	1
5	1025	2	4	10025	15	3	100025	2
8	1026	3	1	10026	16	6	100026	3
1	1027	4	5	10027	17	10	100027	4
6	1028	5	2	10028	18	4	100028	5
1	1029	6	6	10029	19	10	100029	6
8	1030	7	3	10030	20	6	100030	7
5	1031	8	7	10031	21	3	100031	8
3	1032	9	4	10032	22	1	100032	9
2	1033	10	8	10033	23	0	100033	10
2	1034	0						

Observando os ciclos de números com quantidades pares de dígitos e quantidades ímpares de dígitos, percebemos que $a_{10^{2(k+1)+1}+l} \equiv a_{10^{2k+1}+l} - 2$ e $a_{10^{2(k+1)}+l} \equiv a_{10^{2k}+l} + (-1)^l \cdot 2$. Vamos demonstrar essas propriedades.

Já provamos que $a_{10^{k+1}-1} \equiv a_{10^{k-1}-1} - 2$. Considerando, então, que $a_{10^{k+1}} = 10^{k+2}a_{10^{k+1}-1} + 10^{k+1}$ e $a_{10^{k-1}} = 10^k a_{10^{k-1}-1} + 10^{k-1}$:

$$a_{10^{k+1}} \equiv (-1)^{k+2}a_{10^{k+1}-1} + (-1)^{k+1} \equiv (-1)^k(a_{10^{k-1}-1} - 2) + (-1)^{k-1} \Leftrightarrow$$

$$a_{10^{k+1}} \equiv 10^k a_{10^{k-1}-1} + 10^{k-1} + (-1)^{k+1} \cdot 2 \equiv a_{10^{k-1}} + (-1)^{k+1} \cdot 2$$

Isso prova o caso em que $l = 0$. Indutivamente, temos os demais casos.

0			10			9		
1	1000000	100	9	10000000	10	3	100000000	100
1	1000001	101	9	10000001	0	10	100000001	101
2	1000002	102	10	10000002	1	4	100000002	102
2	1000003	103	1	10000003	2	0	100000003	103
3	1000004	104	4	10000004	3	5	100000004	104
3	1000005	105	8	10000005	4	1	100000005	105
4	1000006	106	2	10000006	5	6	100000006	106
4	1000007	107	8	10000007	6	2	100000007	107
5	1000008	108	4	10000008	7	7	100000008	108
5	1000009	109	1	10000009	8	3	100000009	109
6	1000010	0	10	10000010	9	8	100000010	0
6	1000011	1	9	10000011	10	4	100000011	1
7	1000012	2	9	10000012	0	9	100000012	2
7	1000013	3	10	10000013	1	5	100000013	3
8	1000014	4	1	10000014	2	10	100000014	4
8	1000015	5	4	10000015	3	6	100000015	5
9	1000016	6	8	10000016	4	0	100000016	6
9	1000017	7	2	10000017	5	7	100000017	7
10	1000018	8	8	10000018	6	1	100000018	8
10	1000019	9	4	10000019	7	8	100000019	9
0	1000020	10	1	10000020	8	2	100000020	10
0	1000021	11	10	10000021	9	9	100000021	11
1	1000022	12	9	10000022	10	3	100000022	12
1	1000023	13	9	10000023	0	10	100000023	13
2	1000024	14	10	10000024	1	4	100000024	14
2	1000025	15	1	10000025	2	0	100000025	15
3	1000026	16	4	10000026	3	5	100000026	16
3	1000027	17	8	10000027	4	1	100000027	17
4	1000028	18	2	10000028	5	6	100000028	18
4	1000029	19	8	10000029	6	2	100000029	19
5	1000030	20	4	10000030	7	7	100000030	20
5	1000031	21	1	10000031	8	3	100000031	21
6	1000032	22	10	10000032	9	8	100000032	22
6	1000033	23	9	10000033	10	4	100000033	23

8				7				6		
7	1000000000	10		5	10000000000	100		5	1E+11	10
7	1000000001	0		8	10000000001	101		5	1E+11	0
8	1000000002	1		6	10000000002	102		6	1E+11	1
10	1000000003	2		9	10000000003	103		8	1E+11	2
2	1000000004	3		7	10000000004	104		0	1E+11	3
6	1000000005	4		10	10000000005	105		4	1E+11	4
0	1000000006	5		8	10000000006	106		9	1E+11	5
6	1000000007	6		0	10000000007	107		4	1E+11	6
2	1000000008	7		9	10000000008	108		0	1E+11	7
10	1000000009	8		1	10000000009	109		8	1E+11	8
8	1000000010	9		10	10000000010	0		6	1E+11	9
7	1000000011	10		2	10000000011	1		5	1E+11	10
7	1000000012	0		0	10000000012	2		5	1E+11	0
8	1000000013	1		3	10000000013	3		6	1E+11	1
10	1000000014	2		1	10000000014	4		8	1E+11	2
2	1000000015	3		4	10000000015	5		0	1E+11	3
6	1000000016	4		2	10000000016	6		4	1E+11	4
0	1000000017	5		5	10000000017	7		9	1E+11	5
6	1000000018	6		3	10000000018	8		4	1E+11	6
2	1000000019	7		6	10000000019	9		0	1E+11	7
10	1000000020	8		4	10000000020	10		8	1E+11	8
8	1000000021	9		7	10000000021	11		6	1E+11	9
7	1000000022	10		5	10000000022	12		5	1E+11	10
7	1000000023	0		8	10000000023	13		5	1E+11	0
8	1000000024	1		6	10000000024	14		6	1E+11	1
10	1000000025	2		9	10000000025	15		8	1E+11	2
2	1000000026	3		7	10000000026	16		0	1E+11	3
6	1000000027	4		10	10000000027	17		4	1E+11	4
0	1000000028	5		8	10000000028	18		9	1E+11	5
6	1000000029	6		0	10000000029	19		4	1E+11	6
2	1000000030	7		9	10000000030	20		0	1E+11	7
10	1000000031	8		1	10000000031	21		8	1E+11	8
8	1000000032	9		10	10000000032	22		6	1E+11	9
7	1000000033	10		2	10000000033	23		5	1E+11	10