Princípio da Indução Finita

Edson Roberto Abe

21 / jan / 2019

1 - Prove que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; $\forall$ n $\in$ N*.

2 - Prove que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, $\forall$ n $\in$ N*.

3 - Observe que

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6}$$

$$1^2 + 3^2 = \frac{3.4.5}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5.6.7}{6}$$

Obtenha a regra geral sugerida por estes exemplos, e prove-a.

4 - Prove que $n^3 - n$ é divisível por 6, $\forall$ n $\in$ N.

5 - Prove que $5.7^n - 3^n$ é divisível por 4, $\forall$ n $\in$ N.

6 - Demonstrar que para qualquer número natural n, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

7 - Prove que $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9, $\forall$ n $\in$ N.

8 - Prove que: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \ldots + \frac{1}{2018}$.

9 - Prove que todos os números da forma 1007, 10017, 100117, ... são divisíveis por 53.

10 - Prove que todos os números da forma 12008, 120308, 1203308, ... são divisíveis por 19.

11 - A sequência a_n é definida como segue: $a_0 = 9$, $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$, n > 0. Mostre que a_{10} contém mais do que 1000 noves na notação decimal.

12 - Prove que $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} < 2$, $\forall$ n $\in$ N.

13 - Seja n um inteiro positivo. Prove a desigualdade

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}.$$

14 - Seja n um inteiro positivo. Prove a desigualdade

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3.$$

15 - Prove que

$$2^{m+n-2} \geq mn$$

se m e n forem inteiros positivos.

16 - Usando $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, prove que:

a) $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$

b) $F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$.

17 - Seja F_i o i-ésimo termo na sequência de Fibonnaci. Prove que $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$.