Análise Complexa (sem Freud)

ET©

1 Introdução

Podemos pensar em uma função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ao decompô-la em suas partes real e imaginária:

$$f(x+iy) = u(x,y) + v(x,y)\cdot i \qquad (x,y \in \mathbb{R},\ u,v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}) \tag{1}$$

Entretanto, do ponto de vista analítico, esta é a estratégia **errada**: ao identificarmos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, estamos ignorando o fato de $\mathbb{C}$ ser um **corpo**, o mais importante aspecto que distingue $\mathbb{C}$ de um mero espaço vetorial real de dimensão 2. A existência de divisão em $\mathbb{C}$ permite imitar a definição da derivada real: se $U \subseteq \mathbb{C}$ é um aberto, dizemos que uma função $f\colon U \to \mathbb{C}$ tem **derivada complexa** $f'(z_0)$ em um ponto $z_0 \in U$ se existir o limite

$$f'(z_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{2}$$

Por outro lado, a existência do produto em $\mathbb{C}$ ainda permite, além de multiplicar funções complexas $f,g\colon U \to \mathbb{C}$, estabelecer a familiar regra do produto $(fg)' = f'g + g'f$ para a derivada que acabamos de definir.

Ser diferenciável no sentido complexo é muito mais forte do que simplesmente ser diferenciável como função real. Para melhor entendermos esta relação, definimos os seguintes operadores $\mathbb{C}$-lineares no espaço das funções $f\colon U \to \mathbb{C}$; na notação da decomposição (1),

$$\frac{\partial f}{\partial z} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

A ideia desta definição é pensar em z e $\overline{z}$ como "indeterminadas" e fazer uma "mudança de variáveis" $f(z,\overline{z}) = f(x,y)$ via $x = (z+\overline{z})/2$ e $y = (z-\overline{z})/2i$, aplicando a regra da cadeia. A vantagem desta definição é não depender de uma escolha preconceituosa da base $1, i$ para $\mathbb{C}$ visto como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Exemplo 1.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. A função z^n possui derivada complexa para todo $z \in \mathbb{C}$ e*

$$\frac{\partial z^n}{\partial z} = nz^{n-1} = (z^n)' \qquad \frac{\partial z^n}{\partial \overline{z}} = 0$$

enquanto $|z|^2$ não possui derivada complexa em $\mathbb{C}$ e

$$\frac{\partial |z|^2}{\partial z} = \frac{\partial (z\cdot\overline{z})}{\partial z} = \overline{z} \qquad \frac{\partial |z|^2}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial (z\cdot\overline{z})}{\partial \overline{z}} = z$$

Mais geralmente, se $f\colon U \to \mathbb{C}$ é tal que $f'(z)$ existe para todo $z \in U$ então

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f'$$

Assim, intuitivamente, ter derivada complexa significa "não depender da variável $\overline{z}$".

2 Cálculo em revista

Antes de prosseguir, vamos relembrar algumas noções do cálculo em várias variáveis. Para cada aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, denote por $\mathcal{A}(U)$ o anel de todas as funções reais $\mathcal{C}^\infty$ com domínio U:

$$\mathcal{A}(U) \overset{\text{def}}{=} \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ é } \mathcal{C}^\infty\}$$

Uma 1-**forma** sobre U é uma expressão da forma

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n \qquad (f_i \in \mathcal{A}(U))$$

Denotamos o conjunto de todas as 1-formas sobre U por

$$\Omega^1(U) \overset{\text{def}}{=} \{\omega \mid \omega \text{ é uma 1-forma sobre } U\}$$

Dada uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(U)$, multiplicação por uma função $f \in \mathcal{A}(U)$ define uma nova 1-forma $f\omega \in \Omega^1(U)$, fazendo de $\Omega^1(U)$ um $\mathcal{A}(U)$-módulo livre de posto n; uma base é dada pelas 1-formas $dx_1, \ldots, dx_n \in \Omega^1(U)$. Temos portanto um isomorfismo de $\mathcal{A}(U)$-módulos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(U)^n &\xrightarrow{\approx} \Omega^1(U) \\ (f_1,\ldots,f_n) &\mapsto f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n \end{aligned}$$

A cada função $f \in \mathcal{A}(U)$, podemos associar uma 1-forma $df \in \Omega^1(U)$, dita a **diferencial** de f, pela regra

$$\begin{aligned} d\colon \mathcal{A}(U) &\to \Omega^1(U) \\ f &\mapsto df \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \end{aligned}$$

Note que o mapa acima satisfaz a **regra de Leibniz**:

$$d(fg) = f\cdot dg + g\cdot df \qquad (f,g \in \mathcal{A}(U))$$

Exemplo 2.1. *Seja $X_i \in \mathcal{A}(U)$ a projeção na i-ésima coordenada:*

$$X_i(a_1,\ldots,a_n) = a_i \text{ para todo ponto } (a_1,\ldots,a_n) \in U$$

Então $dX_i = dx_i$.

Agora vejamos o que ocorre quando "mudamos de aberto". Se $V \subseteq \mathbb{R}^m$ é outro aberto e $\phi\colon V \to U$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$, definimos o morfismo **pull-back** $\phi^*\colon \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ como o morfismo de anéis induzido por "composição com ϕ":

$$\begin{aligned} \phi^*\colon \mathcal{A}(U) &\to \mathcal{A}(V) \\ f &\mapsto f\circ\phi \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos definir o pull-back $\phi^*\omega \in \Omega^1(V)$ de 1-forma $\omega \in \Omega^1(U)$ da seguinte maneira. Seja $X_i \in \mathcal{A}(U)$ a função "i-ésima coordenada" e escreva

$$\phi(a_1,\ldots,a_m) = \Big(\phi_1(a_1,\ldots,a_m),\ldots,\phi_n(a_1,\ldots,a_m)\Big) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$$

para $(a_1,\ldots,a_m) \in V$. Note que $\phi_i = \phi^* X_i \in \mathcal{A}(V)$. Agora dado $\omega = f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n \in \Omega^1(U)$, definimos $\phi^*\omega \in \Omega^1(V)$ por

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= \phi^*(f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n) \\ &\overset{\text{def}}{=} (\phi^*f_1)\cdot d(\phi^*X_1) + \cdots + (\phi^*f_n)\cdot d(\phi^*X_n) \\ &= (f_1\circ\phi)\cdot d\phi_1 + \cdots + (f_1\circ\phi)\cdot d\phi_n \\ &= \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} (f_i\circ\phi)\cdot\frac{\partial\phi_i}{\partial x_1}\Big)\cdot dx_1 + \cdots + \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} (f_i\circ\phi)\cdot\frac{\partial\phi_i}{\partial x_m}\Big)\cdot dx_m \end{aligned}$$

Se você está assoberbado pelo "ataque avalanche de índices", comuns em livros de Análise, não se preocupe, vejamos como estas definições são práticas e intuitivas em um exemplo pequeno.

Exemplo 2.2. *Seja $U = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e considere a 1-forma sobre U*

$$\omega \overset{\text{def}}{=} -\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy \in \Omega^1(U)$$

Seja $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$ a função dada por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Para obter o pull-back $\gamma^*\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$, basta "compor com γ", fazendo as substituições $x \leftarrow \cos t$ e $y \leftarrow \operatorname{sen} t$ em ω, ou seja, "troque x em ω pela componente x de γ e troque y em ω pela componente y de γ":

$$\begin{aligned} \gamma^*\omega &= -\frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}d(\cos t) + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}d(\operatorname{sen} t) \\ &= (-\cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t)dt + (\operatorname{sen} t)\cdot(\cos t)dt \\ &= (\operatorname{sen} 2t)\cdot dt \in \Omega^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

A "raison d'être" para se definir 1-formas é: **1-formas são objetos para serem integrados em dimensão** 1. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e considere uma curva orientada (aberta) $\Gamma \subseteq U$ com parametrização $\gamma\colon (a,b) \to \Gamma \subseteq U$. Podemos definir a integral de ω ao longo de Γ simplesmente como a integral do pull-back de ω no inervalo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$:

$$\int_\Gamma \omega \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \gamma^*\omega$$

Suponha que $\delta\colon (c,d) \to \Gamma \subseteq U$ seja outra parametrização, ou seja, $\gamma = \delta\circ\phi$ com $\phi\colon (a,b) \to (c,d)$ um difeomorfismo crescente (uma função bijetora crescente tal que ϕ e sua inversa são diferenciáveis). Das definições, temos $\gamma^*\omega = \phi^*(\delta^*\omega)$ e para qualquer 1-forma $f(s)ds \in \Omega^1(c,d)$,

$$\int_a^b \phi^*\big(f(t)dt\big) = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)ds = \int_c^d f(s)ds$$

Logo a integral de ω ao longo de Γ é independente da parametrização:

$$\int_a^b \gamma^*\omega = \int_a^b \phi^*(\delta^*\omega) = \int_c^d \delta^*\omega$$

No exemplo anterior, a integral de $\omega = -\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ ao longo do círculo unitário $x^2+y^2 = 1$ menos o ponto $(1,0)$ é igual a 0.

Utilizando partições da unidade, podemos estender a definição acima para curvas diferenciáveis quaisquer.

Dizemos que uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(U)$ é **exata** se $\omega = df$ para algum $f \in \mathcal{A}(U)$. Se $\Gamma \subseteq U$ é uma curva diferenciável orientada com início e fim $P, Q \in U$, o **teorema fundamental do cálculo** afirma que

$$\int_\Gamma df = f(Q) - f(P)$$

Em particular, se ω é exata e Γ é uma curva fechada, $\int_\Gamma \omega = 0$.

3 Funções homolorfas

Voltando ao caso complexo, identificando $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, temos que para um aberto $U \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(U)$ denotará o anel das funções que são diferenciáveis no sentido real (i.e., são $\mathcal{C}^\infty$ quando vistas como funções de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$), enquanto $\Omega^1(U)$ denotará o $\mathcal{A}(U)$-módulo livre de posto 2 formado por expressões da forma

$$f_1 dx + f_2 dy \qquad (f_1, f_2 \in \mathcal{A}(U))$$

Aqui, novamente será mais conveniente utilizar como $\mathcal{A}(U)$-base de $\Omega^1(U)$ as 1-formas

$$dz \stackrel{\text{def}}{=} dx + i dy \qquad d\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} dx - i dy$$

Assim, a diferencial complexa pode ser escrita como a aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\begin{aligned} d\colon \mathcal{A}(U) &\to \Omega^1(U) \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \end{aligned}$$

Podemos definir dois outros tipos de diferenciais:

$$\partial f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad \overline{\partial} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$$

de modo que $d = \partial + \overline{\partial}$. Note que todas estas operações satisfazem a regra de Leibniz.
Para $\omega = f dz + g d\overline{z} \in \Omega^1(U)$ e $\Gamma \subseteq U$ uma curva orientada com parametrização $\gamma\colon (a,b) \to \Gamma \subseteq U$, temos explicitamente

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \gamma^* \omega = \int_a^b \Big(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \cdot \overline{\gamma'(t)} \Big) dt$$

Estamos prontos para dar a mais importante definição em Análise Complexa. No que segue, denotamos o disco aberto com centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ por

$$\Delta(z_0; r) \stackrel{\text{def}}{=} \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$$

Definição 3.1. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Dizemos que f é* ***analítica ou holomorfa*** *em U se ela satisfaz uma das (logo todas) seguintes propriedades equivalentes:*

(i) a derivada complexa $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \in U$.

(ii) a derivada complexa $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \in U$ e $f'\colon U \to \mathbb{C}$ é uma função contínua.

(iii) as derivadas complexas $f', f'', f''', \ldots$ existem em U.

(iv) (Cauchy-Riemann) f é continuamente diferenciável, vista como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, e $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

(v) (Fórmula de Cauchy) Para todo disco aberto $\Delta(a; r) \subset U$ e todo $b \in \Delta(a; r)$, temos

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - b} dz$$

(vi) f é localmente expansível em série de potências para todo $z_0 \in U$, ou seja, existe um disco aberto $\Delta(z_0; r) \subseteq U$ e uma série de potências $\sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$ convergente (absolutamente e uniformemente) em $\Delta(z_0; r)$ tal que

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{para todo } z \in \Delta(z_0; r)$$

(vii) (Morera) para todo triângulo $\triangle \subseteq U$ cujo interior também está contido em U,

$$\int_\triangle f(z) dz = 0$$

Denotamos por $\mathcal{O}(U)$ o anel de funções holomorfas em U.

Um dos pontos principais na demonstração das equivalências acima é o aparentemente inócuo

Lema 3.2. *Seja $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$ um função dada por uma série convergente em $\Delta(x_0, r)$. Então a 1-forma $\omega = f(z) dz \in \Omega^1(\Delta(x_0, r))$ é exata. Logo $\int_\Gamma \omega = 0$ para toda curva fechada $\Gamma \subseteq \Delta(x_0, r)$.*

Proof. Propriedades usuais de séries de potência mostram imediatamente que $F(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$ define uma série convergente uniforme e absolutamente em $\Delta(x_0, r)$ e $dF = \omega$. ☐

É fácil ver que $(vi) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Temos $(v) \Rightarrow (vi)$: para $|z - a| = r$, pela fórmula da soma da PG,

$$\frac{f(z)}{z - b} = \frac{f(z)/(z - a)}{1 - \frac{b-a}{z-a}} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \cdot (b - a)^n$$

Portanto integrando em torno da circunferência $|z - a| = r$ obtemos

$$f(b) = \sum_{n \geqslant 0} t_n \cdot (b - a)^n \qquad \text{em que } t_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

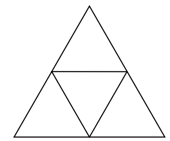
Reciprocamente, $(vi) \Rightarrow (v)$ segue expandindo $f(z)$ como série de potência em torno de b e utilizando o lema para mostrar que

$$\frac{f(z)}{z - b} dz = \frac{f(b)}{z - b} dz + \omega$$

com ω exata; um cálculo explícito termina a prova.
A partir de (vii) temos que é possível definir uma primitiva

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

para $f(z)$, em que a integral segue qualquer poligonal ligando z e z_0; o teorema de Morera garante a independência do caminho tomando. Assim, obtemos que $dF = f(z) dz$ é exata e portanto a integral de $f(z) dz$ em qualquer caminho fechado $\Gamma \subseteq U$ é 0. Utilizando um caminho adquado ("keyhole"), obtemos a fórmula de Cauchy (ver [2], p.45 por exemplo).
A implicação $(i) \Rightarrow (vii)$ é o **teorema de Goursat**, cuja prova é simples: suponha que f satisfaça (i) mas a integral em (vii) é igual a um $L \neq 0$. Podemos dividir $\triangle$ em 4 triângulos $\triangle_1, \ldots, \triangle_4$ com metade do perímetro P de $\triangle$:



Como $\int_\triangle f(z) dz = \int_{\triangle_1} f(z) dz + \cdots + \int_{\triangle_4} f(z) dz$, por casa dos pombos, $|\int_{\triangle_i} f(z) dz| \geqslant L/4$ para algum $i = 1, \ldots, 4$. Repetindo o processo, obtemos no n-ésimo passo, $|\int_{\triangle^{(n)}} f(z) dz| \geqslant L/4^n$ para algum triângulo $\triangle^{(n)}$ de perímetro $P/2^n$. A interseção dos "triângulos encaixantes" $\triangle^{(1)} \supset \triangle^{(2)} \supset \cdots$ determina um ponto z_0. Por hipótese, a função

$$h(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$$

satisfaz $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$. Substituindo e observando que a 1-forma $\big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big) dz$ é exata, temos

$$\begin{aligned} \int_{\triangle^{(n)}} f(z) dz &= \int_{\triangle^{(n)}} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + h(z)(z - z_0) \big) dz \\ &= \int_{\triangle^{(n)}} h(z)(z - z_0) dz \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ (afinal, Análise é o estudo ϵ's, δ's e da desigualdade triangular) e escolha $n \gg 0$ de modo que $|h(z)| < \epsilon$ para todo $z \in \triangle^{(n)}$. Como $|z - z_0| \leqslant P/2^n$ se $z \in \triangle^{(n)}$, temos

$$\frac{L}{4^n} \leqslant \left| \int_{\triangle^{(n)}} h(z)(z - z_0) dz \right| \leqslant \epsilon \left(\frac{P}{2^n} \right)^2 \implies L \leqslant \epsilon P^2$$

Como ϵ pode ser escolhido arbitrariamente próximo de 0, temos uma contradição.

4 Teoremas principais

Eis um resumo dos principais resultados em Análise Complexa. A grande maioria deles são consequências mais ou menos simples da fórmula de Cauchy. A filosofia é que funções analíticas têm "compotamento essencialmente polinomial". Por exemplo, um polinômio não nulo em $\mathbb{C}[z]$ tem uma quantidade finita de zeros, enquanto uma função holomorfa não nula em $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ tem um conjunto discreto de zeros (mas possivelmente infinito, e.g. $\cos z$).

Teorema 4.1. *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto* **conexo** *e seja $f \in \mathcal{O}(U)$ uma função analítica. Então ou f é identicamente nula ou seus zeros são isolados. No segundo caso, se $a \in U$ é um zero de f, para um certo $m \in \mathbb{N}_{>0}$ temos uma fatoração*

$$f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$$

em que $g \in \mathcal{O}(U)$ e $g(a) \neq 0$. O inteiro m é unicamente determinado, chamado de **ordem** *do zero a, denotado $\operatorname{ord}_a f$.*

Teorema 4.2 (Liouville)**.** *Se $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é* **inteira** *(i.e., analítica em todo o plano complexo $\mathbb{C}$) e limitada, então f é constante.*

Teorema 4.3 (Aplicação aberta)**.** *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto conexo e seja $f \in \mathcal{O}(U)$ uma função não constante. Então f é aberta (i.e., leva abertos em abertos)*

Teorema 4.4 (Módulo máximo)**.** *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto conexo e limitado e seja $f \in \mathcal{O}(U)$ uma função que é contínua no fecho $\overline{U}$ de U. Então, $|f|$ atinge seu máximo sobre a fronteira de U.*

Lema 4.5 (Lema de Schwartz)**.** *Seja $f\colon \overline{\Delta}(0;1) \to \overline{\Delta}(0;1)$ uma função contínua, homolorfa em $\Delta(0;1)$. Suponha que $f(0) = 0$. Então $|f(z)| \leqslant |z|$ para todo $z \in \overline{\Delta}(0;1)$. Se ocorre igualdade $|f(z_0)| = |z_0|$ para algum ponto $z_0 \neq 0$, então $f(z) = \alpha z$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$, i.e., f é uma rotação.*

Teorema 4.6. *Considere o chamado* **semi-plano de Poincaré***:*

$$\mathbb{H} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

Seja $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ *o grupo de automorfismos analiticos de $\mathbb{H}$. Há um isomorfismo*

$$PSL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\approx} \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

que leva a classe de uma matriz na transformação de Möbius correspondente.

Definimos uma função **meromorfa** $f\colon U \to \mathbb{C}$ como uma função que, localmente, pode ser escrita como o quociente de duas funções holomorfas: para todo $z_0 \in U$, existem funções homolorfas g, h definidas em uma vizinhança aberta $V \subseteq U$ de z_0 tais que $f(z) = g(z)/h(z)$ para todo $z \in V$. Se $g(z_0) \neq 0$ enquanto $h(z_0) = 0$, dizemos que f tem um **polo** em z_0 (estritamente falando, f não está definida neste ponto, logo o mais correto seria dizer que f define uma função no complemento de seus polos, mas vamos ignorar este preciosismo). Expandindo em série, temos que localmente

$$f(z) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n (z - z_0)^n$$

para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$. O coeficiente a_{-1} na expansão acima é chamado de **resíduo** de f em z_0. A importância do resíduo consiste no fato de que, localmente,

$$f(z)dz = \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz + \omega$$

em que ω é uma 1-forma exata. Assim, ao integrarmos em um caminho fechado, temos que apenas o resíduo contribui para a integral: para $\epsilon > 0$ suficiente pequeno, temos

$$\int_{|z-z_0|=\epsilon} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{a_{-1}}{z-z_0} dz = 2\pi i a_{-1}$$

Utilizando o teorema de Morera (para caminhos quaisquer), é fácil provar que se Γ e Γ' são caminhos homotópicos em $V = U \backslash \{\text{polos de } f\}$ então $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz$. Em outras palavras, temos um pareamento entre o grupo de homologia $H_1(V, \mathbb{C})$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ e o grupo de cohomologia de deRham complexo $H^1(V)$ formado pelas 1-formas do tipo $f(z)dz$ com f holomorfa, módulo 1-formas exatas dg com g holomorfa (como $\Omega^2 = 0$ em dimensão 1, todas as formas são automaticamente fechadas). Este pareamento bilinear

$$H_1(V, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} H^1(V) \to \mathbb{C}$$
$$[\gamma] \otimes [\omega] \mapsto \int_\gamma \omega$$

é um caso particular da importante **dualidade de Poincaré**. O teorema de Cauchy é, portanto, um caso particular (mas importante) de resultados mais gerais em Topologia Algébrica.

Teorema 4.7. *Seja γ um caminho fechado e simples percorrido no sentido positivo. Seja f uma função meromorfa com um número finito zeros e polos no interior de γ e suponha que f não se anula sobre γ. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_P \operatorname{ord}_P(f)$$

Os dois teoremas seguintes são bem mais profundos e suas provas não são tão imediatas quanto às dos teoremas anteriores.

Teorema 4.8 (Aplicação de Riemann)**.** *Suponha que $U \subsetneq \mathbb{C}$ seja um subconjunto próprio de $\mathbb{C}$ que é* **simplesmente conexo** *(i.e., $\pi_1(U) = 0$). Fixado $z_0 \in U$, existe uma única função biholomorfa $F\colon U \xrightarrow{\approx} \Delta(0;1)$ tal que $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$.*

Teorema 4.9 (Little Picard)**.** *Seja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ uma função inteira. Se existem dois pontos distintos $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ que não pertencem à imagem de f, então f é constante.*

5 Primeiros exercícios

1. Para cada aberto $U \subset \mathbb{C}$, seja

$$\mathcal{M}(U) \overset{\text{def}}{=} \{f\ U \to \mathbb{C} \mid f \text{ é uma função meromorfa em } U\}$$

Mostre que se U é conexo não vazio então $\mathcal{M}(U)$ é um corpo, que contém o domínio $\mathcal{O}(U)$.

2. Seja

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-100)}{(z+10)(z+20)(z+30)\ldots(z+100)}$$

Qual o valor de

$$\int\limits_{|z|=10.5} \frac{f'(z)}{f(z)} dz?$$

3. Qual o valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=2013} \frac{e^z}{z^{100}} dz?$$

4. Sejam $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ dois polinômios com $\deg p < \deg q$. Seja $R > 0$ grande o suficiente para que todas as raízes de $q(z)$ pertençam a $\Delta(0;R)$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R} \frac{p(z)}{(z-a)q(z)} dz = 0$$

para todo $a \in \Delta(0;R)$.

5. Seja $U = \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

(a) Prove: não existe uma função analítica $f\colon U \to \mathbb{C}$ tal que $e^{f(z)} = 1/z$ para todo $z \in U$.

(b) Seja $g\colon U \to \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Considere o inteiro

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

Mostre que existe uma função analítica $f\colon U \to \mathbb{C}$ tal que $e^{f(z)} = g(z)/z^n$ para todo $z \in U$.

6.

(a) Seja $a \in \mathbb{C}$ não inteiro e seja Q_N o quadrado centrado em 0, de lados de tamanho $2N+1$, cujos vértices são $(\pm 1 \pm i)(N + 1/2)$, com N é natural. Mostre que

$$\lim_{N \to \infty} \int_{Q_N} \frac{\pi \operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2 - a^2} dz = 0$$

(b) Mostre que

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

para todo $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$.

7. Determine todas as funções holomorfas $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ com pelo menos dois pontos fixos distintos.

8. Considere a matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{R})$ satisfaz $AJ = JA$ então A é o Jacobiano de alguma função biholomorfa (em algum ponto z_0). Na notação (1), o jacobiano de f é dado por

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

9. Nesta questão, vamos encontrar uma fórmula explícita para o valor da função zeta de Riemann

$$\zeta(2k) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{2k}}$$

para inteiros positivos pares $2k$ em termos dos coeficientes b_{2n-1} da expansão em série da função cotangente, uma função meromorfa ímpar com polo simples e resíduo 1 nos múltiplos inteiros $n\pi$ de π:

$$\operatorname{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} b_{2n-1} z^{2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \cdots$$

Seja N um inteiro positivo grande. Vamos utilizar o contorno de integração dado pelo quadrado Q_N centrado em 0 e de lados de tamanho $2N+1$, cujos vértices são $(\pm 1 \pm i)(N + 1/2)$.

(a) Mostre que existe uma constante $C > 0$, **independente de** N, para a qual

$$z \in Q_N \implies |\operatorname{cotg} z| \leqslant C$$

(b) Utilizando o teorema do resíduo para o contorno Q_N e a função $f(z) = (\operatorname{cotg} z)/z^{2k}$, verifique que

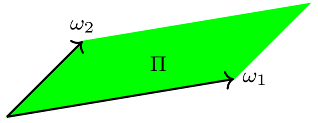
$$\zeta(2k) = -\frac{\pi^{2k} \cdot b_{2k-1}}{2}$$

Em particular, dos termos iniciais acima, temos que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^4}{945}$$

6 Funções elípticas

Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ dois números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, como mostra a figura a seguir.



Seja ainda

$$\Pi = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid 0 \leqslant a < 1,\ 0 \leqslant b < 1\}$$

o **paralelogramo fundamental** associado. Uma função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita **duplamente periódica** se, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z + \omega_1) = f(z), \qquad f(z + \omega_2) = f(z)$$

10. Seja f uma função duplamente periódica.

(a) Mostre que se f é holomorfa, então f é constante.

(b) Mostre que se f não é identicamente nula, f tem uma quantidade finita de zeros e polos em Π.

(c) Mostre que se $f \neq 0$, então o número de zeros de f em Π é igual ao número de polos em Π (contados com multiplicidade).

(d) Se $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ são respectivamente os zeros e polos de $f \neq 0$ em Π, listados com multiplicidade, mostre que

$$a_1 + \cdots + a_n \equiv b_1 + \cdots + b_n \pmod{\Lambda}$$

em que $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ é o reticulado gerado por ω_1, ω_2 (i.e., o subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ gerado por ω_1, ω_2).

(e) Mostre que a soma dos resíduos de $f \neq 0$ em Π é igual a zero. Conclua que não existe uma função duplamente periódica com apenas um polo simples em Π.

11. Para $n \geqslant 3$, defina

$$G_n = \sum_{\omega \in \Lambda'} \frac{1}{\omega^n},$$

em que $\Lambda' = \Lambda \setminus \{0\}$ e $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ (notação do exercício anterior).

(a) Mostre que, se d é a menor distância entre 0 e o paralelogramo de vértices $\pm\omega_1, \pm\omega_2$, então

$$|G_n| \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{8k}{(kd)^n} < \infty$$

(b) Mostre que $G_n = 0$ se n é ímpar.

(c) Mostre que, para z fixado e $|\omega| \gg 0$,

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leqslant \frac{c}{|\omega|^3}$$

para alguma constante c e portanto

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

converge uniformemente em compactos de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, definindo assim uma função meromorfa, a chamada **função** $\wp$ **de Weierstraß**. Sua derivada

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

é claramente duplamente periódica.

(d) Mostre que $\wp(z)$ é uma função par e que $\wp'(z)$ é uma função ímpar. Sendo $f(z) = \wp(z + \omega_1) - \wp(z)$, verifique que $f'(z) = 0$, logo f é constante, e que $f(-\omega_1/2) = 0$, logo f é identicamente nula e portanto $\wp(z)$ é duplamente periódica.

12. (Equação diferencial de $\wp(z)$)

(a) Mostre que, para $|z|$ pequeno,

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(n+1)z^n}{\omega^{n+2}}.$$

e portanto $\wp(z)$ tem expansão de Taylor

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geqslant 1} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n}$$

(b) Mostre que, para $|z|$ pequeno,

$$(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = (108G_4^2 - 252G_8)z^2 + \cdots$$

Conclua que a expansão acima define uma função holomorfa duplamente periódica, portanto identicamente nula. Assim,

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$$

(c) Considere a curva projetiva plana complexa

$$E = Z(Y^2 Z - 4X^3 + 60G_4 X Z^2 + 140 G_6 Z^3) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

e a função

$$f\colon \Pi \to E$$

$$z \mapsto \begin{cases} (\wp(z) : \wp'(z) : 1) & \text{se } z \neq 0 \\ (0 : 1 : 0) & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Mostre que se $z, w \in \Pi$ são tais que $\wp(z) = \wp(w)$, então $z \equiv \pm w \pmod{\Lambda}$. Conclua que f é injetora.

(d) Dado $(a : b : 1) \in E$, mostre que $\wp(z) - a$ tem dois zeros (contados com multiplicidade) em Π e que para um deles $\wp'(z) = b$. Conclua que f é sobrejetora. Assim, temos que f é uma bijeção, isto é, E pode ser identificado com um toro.

7 Resíduos

13. Mostre que

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)}$ para $n \geqslant 2$ inteiro

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{6}$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1}\,dx = \frac{4\pi}{5} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}$ se $a > 0$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \pi e^{-a}/a$ se $a > 0$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi(1+a)}{2a^3 e^a}$ para $a > 0$

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{be^b} - \frac{1}{ae^a}\right)$ se $a > b > 0$

(j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \pi/2$

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$

(l) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-a}$ se $a > 0$.

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}$ para $0 < a < 1$.

(n) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\,dx = \pi^3/8$

(o) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\pi/4$

(p) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}$ para $0 < a < 1$

(q) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^3}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{3\operatorname{sen}(\pi a/3)}$ for $0 < a < 3$

14. Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a^2-2a\cos\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

se $0 < a < 1$. E se $a > 1$?

15. Mostre:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \pi/\sqrt{2}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta}\,d\theta = \pi/\sqrt{5}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{a\,d\theta}{a^2+\operatorname{sen}^2\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\theta}{1+2a^2-\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(a+\operatorname{sen}^2\theta)^2}\,d\theta = \frac{\pi(2a+1)}{4\,(a^2+a)^{3/2}}$ para $a > 0$

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = 2\pi/\sqrt{3}$

(f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$ para $0 < b < a$

16. Determine $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n\,d\theta$ para $n \in \mathbb{Z}$ par.

17. Sejam $c > 0$ e $a > 0$. Tomando a integral sobre a linha vertical, prove

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^z}{z}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1 \\ 1/2 & \text{se } a = 1 \\ 1 & \text{if } a > 1 \end{cases}$$

em que a integral é interpretada como

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} = \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT}$$

8 Formas modulares

Considere o **semiplano de Poincaré**

$$\mathbb{H} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

Considere ainda o grupo

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc = 1 \right\}$$

Defina

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z \overset{\text{def}}{=} \frac{az+b}{cz+d}$$

(o mapa $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ é chamado de **transformação de Möbius**). É fácil verificar que

$$\Im(\gamma\cdot z) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$$

Portanto $z \in \mathbb{H} \implies \gamma\cdot z \in \mathbb{H}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Uma **forma modular** de peso k é uma função holomorfa $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ que satisfaz

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \qquad \text{para todo } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

e que também é "holomorfa no infinito": note que $z \mapsto z+1$ corresponde a uma matriz em $SL_2(\mathbb{Z})$, logo $f(z+1) = f(z)$ e portanto $f(z)$ admite uma expansão em série de Fourier

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z}$$

(pense em $q = e^{2\pi i z}$ como uma coordenada local de $z = \infty$). Exigimos que $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

18. Seja $k \geqslant 3$. Mostre que

$$G_k(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k},$$

é uma forma modular de peso k.

19. Seja $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ e denote pelo mesmo símbolo a transformação de Möbius correspondente. Mostre que se $f(z)$ é uma forma modular de peso 2 então

$$\gamma^*\big(f(z)dz\big) = f(z)dz$$

Ou seja, formas modulares de peso 2 correspondem à 1-formas invariantes por $SL_2(\mathbb{Z})$.

20.

(a) Mostre que a operação acima é uma ação de $SL_2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}$.

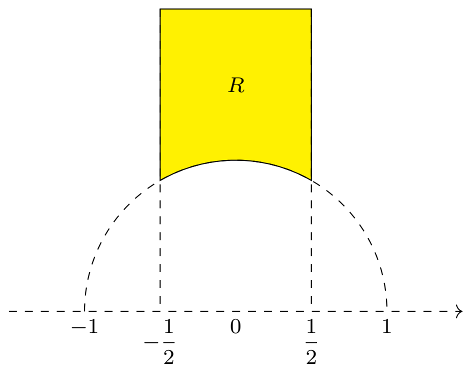
(b) Calcule os estabilizadores de $z = 1+2i$, $z = i$, $z = e^{2\pi i/6}$ e $z = e^{2\pi i/3}$.

(c) Mostre que uma transformação de Möbius leva circunferências/retas em circunferências/retas. Dica: escreva uma transformação geral como uma composição de inversões $S(z) = -1/z$, translações $T(z) = z + a$ e homotetias $A(z) = cz$.

21. Neste exercício, vamos mostrar que a região

$$R = \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 \leqslant \Re(z) \leqslant 1/2,\ |z| \geqslant 1\}$$

contém um domínio fundamental (i.e. um conjunto de representantes para as órbitas) para a ação do exercício anterior.



Para isto, considere os elementos de $SL_2(\mathbb{Z})$

$$T \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Interprete a ação dos elementos S e T sobre $\mathbb{H}$.

(b) Fixe $\tau \in \mathbb{H}$. Mostre que, para qualquer constante $L > 0$, existe um número finito de pares de inteiros (c,d) tais que $|c\tau+d| < L$. Conclua que existe um elemento $A_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$ que maximiza $\Im(A\tau)$ ($A \in SL_2(\mathbb{Z})$).

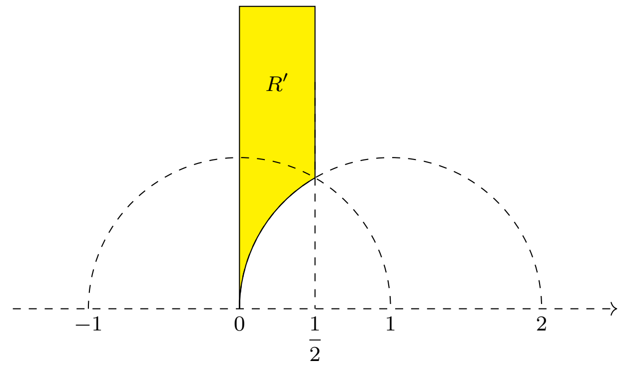
(c) Mostre que $-1/2 \leqslant \Re(T^n A_0\tau) \leqslant 1/2$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Conclua que $T^n A_0 \tau \in R$. Para isto, suponha por absurdo que $|T^n A_0\tau| < 1$; verifique que

$$\Im(ST^n A_0\tau) > \Im(T^n A_0 \tau)$$

o que contradiz a escolha de A_0.

(e) Mostre que a região a seguir também é um domínio fundamental para a ação $SL_2(\mathbb{Z}) \circlearrowright \mathbb{H}$.



(f) Mostre que T e S geram $SL_2(\mathbb{Z})$. Dica: considere a ação de um ponto interior de R, cujo estabilizador é trivial.

(g) Interprete geometricamente o quociente de $\mathbb{H}$ pela ação de $SL_2(\mathbb{Z})$ como um "disco". (Na realidade, $\mathbb{H}$ é um modelo do plano hiperbólico. A região R é um "triângulo" com vértices em $(\pm 1 + i\sqrt{3})/2$ e $i\infty$ e as órbitas destre triângulo produzem uma "triangulização" do plano hiperbólico.).

22. Seja $f \neq 0$ uma forma modular de peso $2k$. Mostre que

$$\operatorname{ord}_\infty(f) + \sum_{P\in\tilde{R}} \frac{1}{e_P}\operatorname{ord}_P(f) = \frac{k}{6}$$

em que $\tilde{R}$ é um domínio fundamental como no exercício anterior, $e_P = 2$ para $P = i$, $e_P = 3$ para $P = e^{2\pi i/3}$ e $e_P = 1$ para os demais pontos.

23. Seja

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a, d \equiv 1 \pmod N,\ b, c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

o subgrupo de $SL_2(\mathbb{Z})$ formado pelas matrizes "congruentes a identidade" módulo N.

(a) Mostre que temos uma sequência exata

$$1 \longrightarrow \Gamma(N) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

Conclua que $\Gamma(N)$ possui índice finito em $SL_2(\mathbb{Z})$.

(b) Mostre que os subgrupos

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a, d \equiv 1 \pmod N,\ c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

também possuem índice finito em $SL_2(\mathbb{Z})$.

(c) Mostre que temos uma sequência exata

$$1 \longrightarrow \Gamma_1(N) \longrightarrow \Gamma_0(N) \longrightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow 1$$

(d) Sejam $A_1, \ldots, A_r$ representantes das classes laterais à direita de $\Gamma_0(N)$ em $SL_2(\mathbb{Z})$. Se $D \subseteq \mathbb{H}$ é um domínio fundamental para a ação $SL_2(\mathbb{Z}) \circlearrowright \mathbb{H}$ por transformações de Möbius, mostre que

$$D' = A_1 \cdot D \cup A_2 \cdot D \cup \cdots \cup A_r \cdot D$$

é um domínio fundamental para a ação $\Gamma_0(N) \circlearrowright \mathbb{H}$.

24. Mostre que uma matriz $A \in M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ possui inverso multiplicativo se, e só se, $\det A \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ (o que, como vimos em algum exercício anterior, ocorre se $\det A = \overline{a}$ com $\mathrm{mdc}(a, N) = 1$). Conclua que

$$GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \mid \det A \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\}$$

é um grupo com relação ao produto de matrizes.

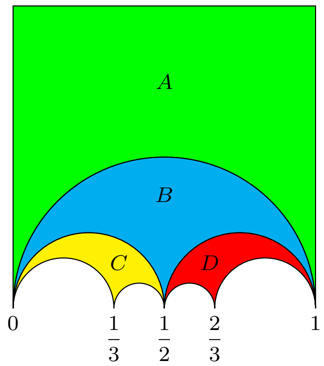
25. Seja

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

Temos que $\Gamma_0(N)$, como subgrupo de $SL_2(\mathbb{R})$, age sobre $\mathbb{H}$ via transformações de Möbius (ver exercício 20).

(a) Mostre que $\Gamma_0(11)$ possui índice 12 em $SL_2(\mathbb{Z})$.

(b) Mostre que, na figura a seguir, cada uma das regiões A, B, C, D são a união de três domínios fundamentais para $SL_2(\mathbb{Z})$.



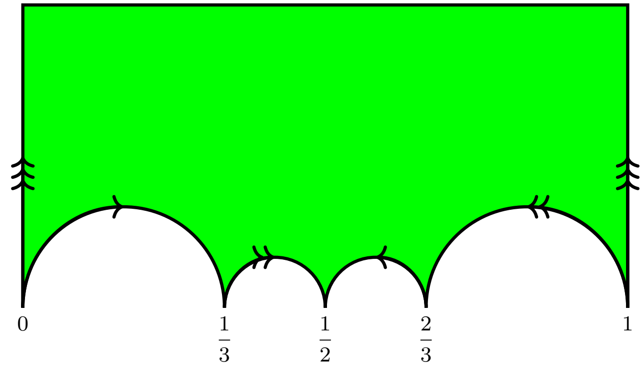
Dica: considere a região R' do exercício 21 e seja $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Mostre que $A = R' \cup \tau R' \cup \tau^2 R'$.

(c) Mostre que a região $A \cup B \cup C \cup D$ contém um domínio fundamental para a ação $\Gamma_0(11) \circlearrowright \mathbb{H}$.

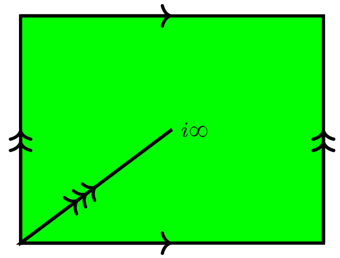
(d) Considere os seguintes elementos de $\Gamma_0(11)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 11 & -3 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$$

Mostre que T é uma translação por 1 para a direita e, na figura a seguir, U leva o interior da circunferência de diâmetro dado pelo intervalo real $[0, \frac{1}{3}]$ no exterior da circunferência de diâmetro $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, enquanto V leva o interior da circunferência de diâmetro $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ no exterior da de diâmetro $[\frac{2}{3}, 1]$, com as orientações indicadas nas fronteiras.



Interprete geometricamente este domínio fundamental como um toro:



(e) Mostre que $\Gamma_0(11)$ é gerado pelas matrizes T, U, V.

References

[1] Lang, Serge. Complex Analysis

[2] Shakarchi, Stein. Complex Analysis