Teorema do Confronto em Teoria dos Números

Professor Emiliano Augusto Chagas

O método do confronto, ou do sanduiche, é um teorema que permite o cálculo de uma expressão ao aprisionar essa expressão entre duas outras.

Dentre as estratégias mais recorrentes, é relevante mencionar:

1) Para inteiros positivos *m* e *n*, se $n \leqslant m \leqslant n+1$, então $m = n$ ou $m = n + 1$.

2) Se *n* é um iteiro positivo e $n < m < n+1$, então *m* não é um inteiro positivo.

3) Não existem quadrados perfeitos entre quaisquer dois quadrados perfeitos consecutivos, ou seja, se *m* e *n* são números inteiros positivos e $n^2 < m < (n+1)^2$, então *m* não é um quadrado perfeito. Essa ideia se estende para expoentes maiores, ou seja, não existem cubos perfeitos entre quaisquer dois cubos perfeitos consecutivos, e assim por diante.

4) Ainda no espírito do item anterior, para inteiros positivos *m* e *n* , se $n^2 \leqslant m \leqslant (n+1)^2$, então $m = n^2$ ou $m = (n+1)^2$ ou *m* não é um quadrado perfeito.

Exemplos

1) O quadrado de um inteiro é chamado de número quadrado perfeito. Se x é um número quadrado perfeito, então o próximo é?

2) Se $S = \dfrac{1}{\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\cdots+\frac{1}{2001}}$, qual é a parte inteira de *S*?

3) Encontre o menor inteiro maior que $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$

4) Encontre todos os possíveis valores de *n* se $n^2 \leqslant m \leqslant (n+1)^2$, *n* e *k* são valores inteiros positivos.

5) Encontre todos os números naturais *n* tais que $n^2 - 19n + 91$ é um quadrado perfeito.

6) Encontre todos os inteiros positivos para a equação $5x^2+2y^2=98$.

7) Encontre o menor valor positivo de $x+y+z$, onde *x*, *y* e *z* são números inteiros positivos distintos que satisfazem $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{10}$.

Exercícios

8) Se $S=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2001}+\dfrac{1}{2002}+\cdots+\dfrac{1}{2010}}$, qual é a parte inteira de S?

9) Se $f(x)=x^2+x$, prove que $4f(a)=f(b)$ não possui solução inteira positiva.

10) Encontre o número de pares ordenados (m,n) dos números inteirs tais que $1\leqslant m,n\leqslant 99$, tais que $(m+n)^2+3m+n$ é um número quadrado perfeito.

11) Encontretodos os pares de inteiros positivos (m,n) tais que tanto x^2+3y e y^2+3x sejam quadrados perfeitos.

12) Mostre que é impossível que x^2+y+1 e y^2+4x+3, com x e y inteiros positivos, sejam ambos quadrados perfeitos.

13) Encontre todas as soluções inteiras da equação $x^3+7y=y^3+7x$, onde $x > y > 0$.

14) Encontre as triplas de inteiros positivos x, y e z satisfazendo $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{5}$.

15) A soma dos recíprocos de quatro inteiros positivos consecutivos é $19/20$. Encontre a soma dos produtos obtidos tomando dois a dois distintos cada vez.

16) Encontre n inteiro positivo tal que n^2-71 é divisível por $7n+55$.

17) Encontre todos os valores possíveis de n tal que $x^3+7y=y^3+7x$, m e n são inteiros positivos.

18) Encontre a soma de todos os valores inteiros positivos de m tal que m^2+m+7 é um número quadrado perfeito.

19) Prove que não é possível que o produto de quatro números inteiros positivos consecutivos seja um cubo de um número positivo.

20) Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação $m^2-2mn+14n^2=217$.

21) Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação $xy+yz+zx=xyz+2$.

22) Encontre as triplas de inteiros positivos x, y e z satisfazendo $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6}$.

23) O número de cinco dígitos $\overline{2x9y1}$ é um quadrado perfeito. Encontre $3x+7y$.