Equações do Segundo Grau

Professor Emiliano Augusto Chagas

Produtos Notáveis

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Equação do Segundo Grau

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b e c reais e $a \neq 0$. Suas raízes são $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, se Δ não for negativo. Portanto, se $\Delta < 0$ a equação não possui raízes reais, se $\Delta = 0$ a equação possui duas raízes reais iguais e se $\Delta > 0$ então e equação possui duas raízes reais distintas.

Fatoração do Trinômio do Segundo Grau

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c$ com a, b e c reais e $a \neq 0$. Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui raízes reais x_1 e x_2, então podemos escrever $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Soma e Produto das Raízes de uma Equação do Segundo Grau

Se desenvolvermos a última equação, da fatoração do trinômio do segundo grau, obtemos as seguintes expressões que associam a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau com seus coeficientes:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Problemas Teóricos

01) Desenvolva e prove os produtos notáveis listados no começo.

02) Se $a \neq 0$ podemos escrever $ax^2 + bx + c = 0$ como $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Vamos resolver a equação do segundo grau!

a) Utilizando o produto notável $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, encontre *k* tal que $(x+k)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + k^2$.

b) Utilizando o item anterior, escreva $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \cdots$. Desenvolva o lado direito da equação e finalmente extraia a raiz quadrada, mostrando que se $\Delta = b^2 - 4ac$ não for negativo, as raízes da equação são $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

03) Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e duas raízes reais. Podemos escrever sua forma fatorada como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Desenvolva o lado direito dessa equação, agrupando os termos na variável *x*. Igualando os termos do lado esquerdo com o direito, mostre que: $b = -a(x_1 + x_2)$ e $c = ax_1x_2$, e finalmente mostre que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Problemas Propostos

04) (OPM) Considere a equação de duas variáveis $n^2 - nm - m^2 = 0$. Encontraremos todas as suas raízes reais. Se m≠0, dividindo a equação dada por m^2 obtemos $n^2 - nm - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{m}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{n}{m} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}m$ ou $n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}m$. Observe que se m = 0 na última equação então n = 0, ou seja, realmente encontramos todas as soluções. Agora é sua vez!

a) Encontre as soluções reais da equação $n^2 - 4nm + m^2 = 0$.

b) Encontre as soluções racionais da equação $n^4 - 6n^2m^2 + 8m^4 = 0$.

05) Calcule $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$.

06) (OCM) Se as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ são positivas, mostre que o mesmo ocorre com as raízes da equação $qy^2 + (p - 2rq)y + 1 - pr = 0$, onde *r* é um número positivo.

07) (OCM) As raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ são *R* e *S*. Determine a equação do segundo grau cujas raízes são *aR* + *b* e *aS* + *b*.

08) (OCM) Se $x^2 + x + 1 = 0$, calcule o valor numérico de:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots + \left(x^{27} + \frac{1}{x^{27}}\right)^2$$

09) (OCM) Na equação $x^2 - px + q = 0$, os números *p* e *q* são inteiros positivos.
a) Mostre que se essa equação tem duas raízes reais e iguais, então *p* é par.
b) Em que situação essa equação não possui raízes reais iguais? Justifique.

10) (OCM) Seja *b* um número real não nulo de modo que a equação do segundo grau $x^2 + b^2x + \sqrt{\pi} = 0$ tenha raízes reais x_1 e x_2. Se $x_1\sqrt{\pi} = x_2(bx_2 - \sqrt{\pi})$, prove que o número *b* é negativo.

11) (Lista Cone Sul) Sabemos que o número de soluções reais do seguinte sistema é finito. Prove que o sistema possui uma quantidade par de soluções.

$$\left|\begin{array}{l}(y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1) \\ (x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1)\end{array}\right.$$

12) (OBM) Resolva, em números reais, o sistema

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$$
$$xyz = 1.$$