Funções BEM Maiores do que Torres!!

Edmilson Motta SO 2019

Função de Ackermann

Em 1928, o matemático alemão Wilhelm Ackermann definiu uma função $\varphi(x, y, n)$, de N em N, que captura a ideia de criar uma nova operação pela iteração de operações já definidas. Encare a terceira entrada n como um indicador do nível da operação binária aplicada às primeiras duas entradas.

A *função de Ackermann* é definida pela recursão

$$\varphi(x, y, 0) = x + y$$

$$\varphi(x, 0, n+1) = \begin{cases} 0 \text{ se } n = 0 \\ 1 \text{ se } n = 1 \\ x \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\varphi(x, y+1, n+1) = \varphi(x, \varphi(x, y, n+1), n)$$

A maioria dos textos apresenta uma variante binária devido a Peter, $\varphi_n(x, y) \coloneqq \varphi(x, y, n)$.

Problema 1. Apresente as seguintes funções $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y), \varphi_4(x, y)$.

Funções Recursivas Primitivas

Nós podemos observar que, na definição acima, cada nível φ_n é obtido iterando o nível anterior. Essencialmente, estamos utilizando duas operações básicas sobre funções de N em N.

Composição

Dadas funções $h(x_1, \dots, x_m)$ e $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$ nós podemos compor tais funções para definir uma nova função:

$$f(x_1, \dots, x_m) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

Recursão

Dadas funções $g(x_1, \dots, x_n)$ e $h(x_1, \dots, x_n, y, z)$ nós podemos definir f por recursão de g e h:

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$$

As funções que podem ser definidas utilizando essas operações pertencem a uma família de funções muito importante, as *funções recursivas primitivas*. Para definirmos tal família, precisamos introduzir as seguintes *funções básicas*.

Função Zero: $\mathrm{Zero}(x) = 0$

Função Sucessor: $S(x) = x + 1$

Funções Projeção: $P_n^i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

Problema 2. Mostre que cada nível $\varphi_n(x, y)$ da função de Ackermann é uma função recursiva primitiva.

Problema 3. Mostre que as funções a seguir são recursivas primitivas.

a) A *função predecessor* $p(x)$:

$$p(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \quad\;\; \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

b) $x \dot{-} y$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y \text{ se } x \geq y \\ 0 \quad\;\; \text{ se } x < y \end{cases}$$

c) $|x - y|$

d) A *função constante* $f(x) = k$, $k \in N$.

e) $x = y$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = y \\ 0 \text{ se } x \neq y \end{cases}$$

f) A *função paridade* $E(x)$:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{se x é par} \\ 1 & \text{se x é ímpar} \end{cases}$$

g) $H(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ **h)** $\text{máx}(x,y)\,;\text{mín}(x,y)$

Problema 4. Se $f(t, x_1, \dots, x_n)$ é recursiva primitiva, então

$$g(y, x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=0}^{y} f(t, x_1, \dots, x_n)$$

e

$$h(y, x_1, \dots, x_n) = \prod_{t=0}^{y} f(t, x_1, \dots, x_n)$$

são recursivas primitivas.

Problema 5. Sejam P e Q funções recursivas primitivas cuja imagem é $\{0,1\}$. Sejam ainda g e h funções recursivas primitivas. Prove que são recursivas primitivas.

a) $\sim P$, $P \wedge Q$ e $P \vee Q$.

b) (Definição por casos)

$$f = \begin{cases} g \text{ se } P \\ h \text{ se } \sim P \end{cases}$$

c) $(\forall t)_{\leq y} P(t, x_1, \dots, x_n)$ e $(\exists t)_{\leq y} P(t, x_1, \dots, x_n)$

d) $y|x$ **e)** $\text{Primo}(x) = \text{"}x \text{ é primo"}$

f) $\sigma(x)$, soma dos divisores de x.

g) $\text{rem}(x,y) = \text{"resto da divisão eucliana de } x \text{ por } y\text{"}$

h) $\text{SQSM}(x) = \text{"}x \text{ é a soma de dois quadrados"}$

O sucesso mostrado no problema anterior pode dar a entender que qualquer função "computável" – esse conceito pode ser definido adequadamente – seja recursiva primitiva. Veremos no próximo teorema que isso é falso.

Teorema 1. Considere a *função de Peter – Ackermann*:

$$A(0,y) = y + 1, A(x+1,0) = A(x,1) \text{ e } A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y))$$

A função A de Peter – Ackermann não é recursiva primitiva.

Uma interpretação usual desse resultado é que para escrever um programa que calcule os valores da função precisamos de um comando equivalente a um "while".

Veremos agora outros contextos (mais naturais?) em que aparecem funções que não funções recursivas primitivas, pois crescem rápido demais.

Problema 6. Construa uma função com imagem $\{0,1\}$ que não é recursiva primitiva.

Um pouco de história

A função de Sudan $F_n(x,y)$ foi o primeiro exemplo de uma função definida recursivamente, mas que não é recursiva primitiva. Ela foi apresentada em 1927 por Gabriel Sudan, um matemático romeno que foi orientado por Hilbert. Define-se $F_0(x,y) = x + y$, $F_{n+1}(x,0) = x, n > 0$, e

$$F_{n+1}(x, y+1) = F_n(F_{n+1}(x,y), F_{n+1}(x,y) + y + 1), n \geq 0.$$

Teorema de Van der Waerden

Teorema 2. Dados inteiros $r, k \geq 1$, para qualquer coloração de N com r cores existe uma PA monocromática com k elementos.

Esquema de demonstração

Demonstraremos que existe um número $W(k,r)$ tal que dados inteiros $r, k \geq 1$, para qualquer coloração de $\{1,2,\dots,W\}$ com r cores existe uma PA monocromática com k elementos. Observe que esse resultado que iremos demonstrar é, em certa medida, mais forte do que a versão original do teorema. De fato, construiremos uma função $U(k,r) \geq W(k,r)$. Sabe-se, atualmente, que $U(k,r) \gg W(k,r)$.

É imediato que podemos tomar $U(2,r) = W(2,r) = r + 1$. Seja, então, $b_1 = U(k-1,r) + \lfloor (U(k-1,r) - 1)/(k-2) \rfloor$ e $b_{j+1} = U\left(k-1, r^{b_j}\right) + \left\lfloor \left(U\left(k-1, r^{b_j}\right) - 1\right)/(k-2) \right\rfloor$. Definimos $U(k,r) = b_r \cdots b_2 b_1$. Verifica-se que $U(k,r) \geq W(k,r)$.

Um resultado mais forte é um dos teoremas mais celebrados do Século XX: o ***teorema de Szemerédi.***

Teorema 3. Seja $A \subset N$. Se

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n} > 0,$$

então para qualquer $k \geq 1$, A contém uma progressão aritmética de tamanho k.

Problema 7. $U(k,r)$ não é recursiva primitiva.

Em 1986, Shelah demonstrou que $W(k,r)$ é limitado por uma função recursiva primitiva. Novas ideias e técnicas têm sido utilizadas para diminuir os limitantes superiores dessa função.

Fechamos a nossa apresentação com dois teoremas interessantes sobre limitantes inferiores para a função W.

Teorema 4. (Berlekamp) Se p é primo, $W(p+1,2) > p2^p$.

Teorema 5. (Folkman) $W(4,2) > 34$. *(De fato, sabe-se que $W(4,2) = 35$.)*

Vimos nesse texto que certas funções crescem tão rápido que não podem ser calculadas sem a existência de um comando do tipo “while”. Na verdade, existem funções que crescem tão rapidamente que os Axiomas de Peano não são suficientes para que possamos demonstrar fatos sobre elas. Vejamos um resultado muito importante com tal característica.

Teorema 6. Seja $h : N \to N$ uma função crescente. Um conjunto $X \subset N$ é h-grande se $|X| \geq h(\min X)$. Para $r, k, n, m \in N$, nós escrevemos $m \overset{h}{\rightarrow} (n)_r^k$ se para todas as r-colorações dos subconjuntos com k elementos de $[m] = \{1,2,\dots,m\}$ existe um subconjunto h-grande monocromático de $[m]$ de tamanho pelo menos n.

Sendo, então $h : N \to N$ uma função crescente e $r, k, n \in N$, existe $m \in N$ com $m \overset{h}{\rightarrow} (n)_r^k$.

Teorema 7. (Paris – Harrington) A Aritmética de Peano não permite provar o Teorema 6.

Um pouco de história

Poucos valores exatos são conhecidos para a função W**:** $W(3,2) = 9; W(4,2) = 35, W(5,2) = 178, W(6,2) = 1132, W(3,3) = 27, W(4,3) = 293, W(3,4) = 76$. O número de limitantes superiores e inferiores já descobertos é bem mais significativo.

Como vimos acima, os limitantes superiores obtidos nas demonstrações costumam ser muito grandes. Até 1987, não se sabia se W era limitada por uma função recursiva primitiva. R. L. Graham por muitos anos ofereceu US$1000 por uma prova do limitante $W(k,2) < 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, uma torre de k 2´s. Em 1987, S. Shellah deu uma prova de que $W(k,2)$ é menor do que a função função torre iterada, $s(n) = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\} n$ vezes, com efeito, $W(k,2) < s^{k+2}(1)$. Tal função é recursiva primitiva, mas esse é um limitante bem maior do que o sugerido por Graham. Mesmo assim, Shellah fez jus a um prêmio de US$500.

Em 1999 no Congresso "The Mathematics of Paul Erdös", Graham pagou o prêmio integral de US$1000 para W. Timothy Gowers, que provou que $W(k,2) < 2^{2^{2^{2^{2^{k+9}}}}}$. R. L. Graham ofereceu, então, um novo prêmio de mil dólares agora para o limitante $W(k,2) < 2^{k^2}$.

Brown demonstrou que se fazemos uma partição aleatória do intervalo $[1, (\log k)^2 2^k]$ em dois subconjuntos, então a probabilidade de um desses subconjuntos conter uma progressão aritmética de tamanho k vai para 1 quando $k \to \infty$.

Bibliografia recomendada

Livros

[1] M. D. Davis, E. J. Weyuker, *Computability, Complexity and Languages - Fundamentals of Theorical Computer Science*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press Inc., 1983

[2] M. Katz, J. Reimann, *An Introduction to Ramsey Theory, - Fast Functions, Infinity and Metamathematics*, Student Mathematical Library, Volume 87, AMS, 2018

[3] M.Machtey, P. Young, *An Introduction to the General Theory of Algorithms*, Theory of Computation Series, Elsevier North – Holland, 1978

Artigos "olímpicos"

[4] E. R. Berlekamp, *A construction for partitions which avoid long arithmetic progressions*, Canadian Mathematics Bulletin, Volume **11** (1968), 409-414

[5] T. C. Brown, *A Pseudo Upper Bound for the van der Waerden Function*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **87**, 1999, 233-238

[6] D. Conlon, *Monochromatic combinatorial lines of lenght three*, https://arxiv.org/abs/1810.09767v1

[7] P. R. Herwig, M. J. H. Heule, P. M. van Lambalgen, H. van Mareen, *A New Method to Construct Lower Bounds for Van der Waerden Numbers*, The Eletronic Journal of Combinatorics, **14** (2007)

[8] B. Landman, A. Robertson, *On Generalized Van der Waerden Triples*, https://arxiv.org/abs/math/9910092

Artigos "interessantes"

[9] A. Bovykin, Brief Introduction to unprovability, https://www.cs.umd.edu/~gasarch/TOPICS/largeramsey/bovINTRO.pdf

[10] T. C. Brown, P.J.-S. Shiue, *On the history of van der Waerden´s theorem on arithmetic progressions*, Tamkang J. Math., **32** (2001), no. 4, 335-341

[11] M. Kouril, *Computing the Van der Waerden Number $W(3,4) = 293$*, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/INTEGERS/papers/m46/m46.pdf

[12] V. Salo, I. Törmä, The Paris – Harrington Theorem, http://www.villesalo.com/article/TPHT.pdf

[13] S. Shelah, *Primitive Recursive Bounds for van der Waerden numbers*, Journal of the American Mathematical Society **1** (1988), no. 3, 683-697