Assuntos:
- Áreas de figuras planas

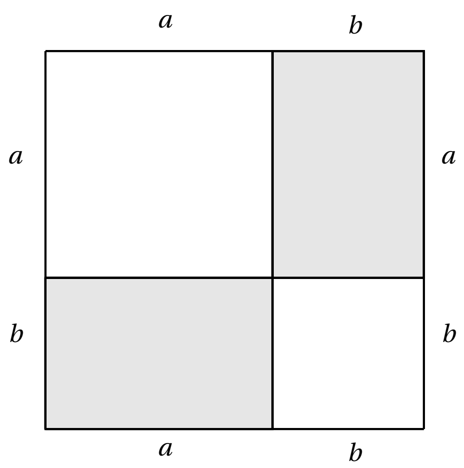
Definição 1. $[A_1A_2\ldots A_n]$ representará a área do polígono $A_1A_2\ldots A_n$.

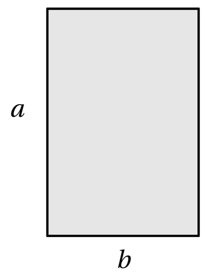
Axioma 1. A área de um quadrado de lado a mede a^2.

Teorema 1. A área de um retângulo de lados a e b é $a \cdot b$.

Demonstração 1. Divida o quadrado de lado $a+b$ em dois quadrados de lados a e b cujas áreas são, respectivamente, a^2 e b^2, e dois retângulos congruentes cuja área chamaremos de S. Dessa forma,

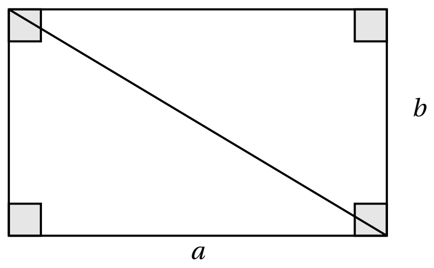
$$(a+b)^2 = 2S + a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2S + a^2 + b^2 \Leftrightarrow S = ab.$$





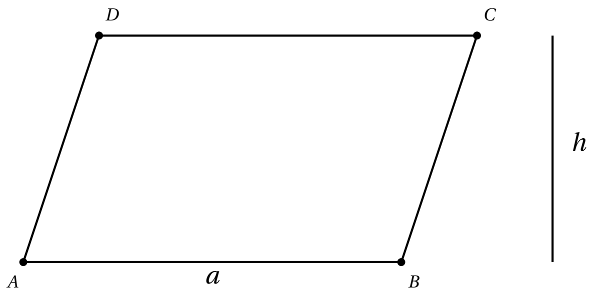
Teorema 2. A área de um triângulo retângulo de catetos a e b é $\dfrac{a \cdot b}{2}$.

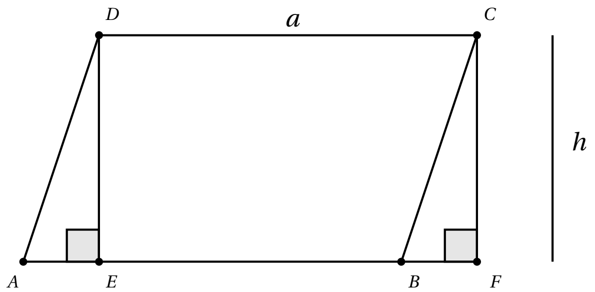
Demonstração 2. Trace uma das diagonais do retângulo. Temos que o mesmo será dividido em dois triângulos retângulos congruentes e, consequentemente, de mesma área. Os lados a e b do retângulo representarão os catetos dos triângulos retângulos. Portanto, a área de um triângulo retângulo de catetos a e b é $\dfrac{a \cdot b}{2}$.



Teorema 3. A área de um paralelogramo $ABCD$ é $a \cdot h$, em que a é a medida do lado AB e h é a distância entre as retas AB e CD.

Demonstração 3. Sejam E o ponto sobre o lado AB tal que $DE \perp AB$ e F o ponto no prolongamento do lado AB tal que $CF \perp AB$. Temos que $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$, pelo caso **cateto - hipotenusa**. Com isso, $[ADE] = [BCF]$. Dessa forma a área do paralelogramo é igual a área do retângulo $EFCD$, ou seja, $a \cdot h$.

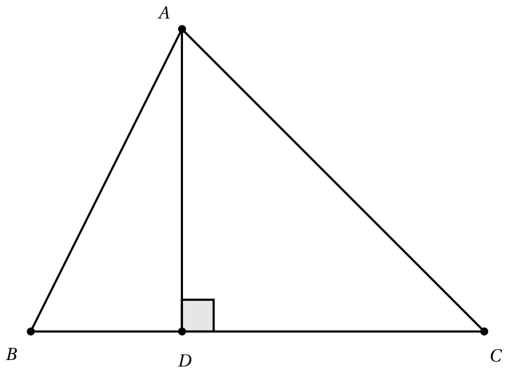




Teorema 4. A área de um triângulo ABC pode ser calculada por $[ABC] = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$, em que AD é a altura relativa ao lado BC.

Demonstração 4. A altura AD divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos. Dessa forma temos que

$$[ABC] = [ABD] + [ACD] \Leftrightarrow \frac{BD \cdot AD}{2} + \frac{CD \cdot AD}{2} \Leftrightarrow$$
$$[ABC] = \frac{(BD + CD) \cdot AD}{2} \Leftrightarrow \frac{BC \cdot AD}{2}.$$



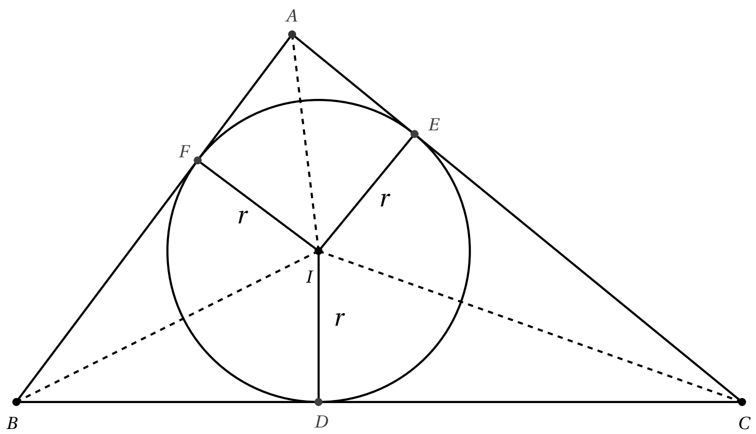
Teorema 5. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita) Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente, e seja r a medida do raio da circunferência inscrita. Então, a área do triângulo ABC pode ser calculada por

$$[ABC] = p \cdot r,$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração 5.

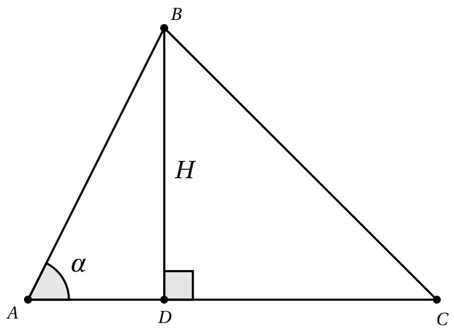
$$[ABC] = [BIC] + [CIA] + [AIB] \Leftrightarrow$$
$$[ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \Leftrightarrow$$
$$[ABC] = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r \Leftrightarrow$$
$$[ABC] = p \cdot r.$$



Teorema 6. (Fórmula trigonométrica da área de um triângulo) Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente. A área do triângulo ABC pode ser calculada por

$$[ABC] = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\angle A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\angle B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\angle C}{2}.$$

Demonstração 6. Vamos demonstrar uma das igualdades. As outras são análogas.



Seja $\angle A = \alpha$. Temos que

$$[ABC] = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{a \cdot H}{2}.$$

Por outro lado, no triângulo ABD, temos $\text{sen}\alpha = \dfrac{H}{c} \Leftrightarrow H = c \cdot \text{sen}\alpha$, então

$$[ABC] = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\alpha}{2}.$$

Teorema 7. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência circunscrita.) Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente, e seja R o raio da circunferência circunscrita. Então, a área do triângulo ABC pode ser calculada por

$$[ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

Demonstração 7. Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente. Temos que

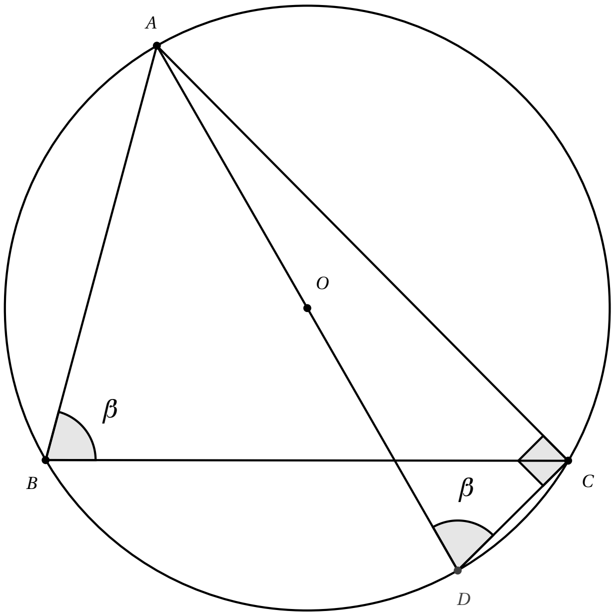
$$[ABC] = \frac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}.$$

Por outro lado, seja AD um diâmetro então, no ACD, temos que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{2R}.$$

Portanto,

$$[ABC] = \frac{abc}{4R}.$$



Teorema 8. (Área de um triângulo em função do raio de uma circunferência ex - inscrita) Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente, e sejam r_a, r_b e r_c os raios das circunferências ex - inscritas relativas aos lados a, b e c, respectivamente. Então, a área do triângulo ABC pode ser calculada por

$$[ABC] = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração 8. Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos que $DB = BE = x$ e $DC = CF = a - x$. Então,

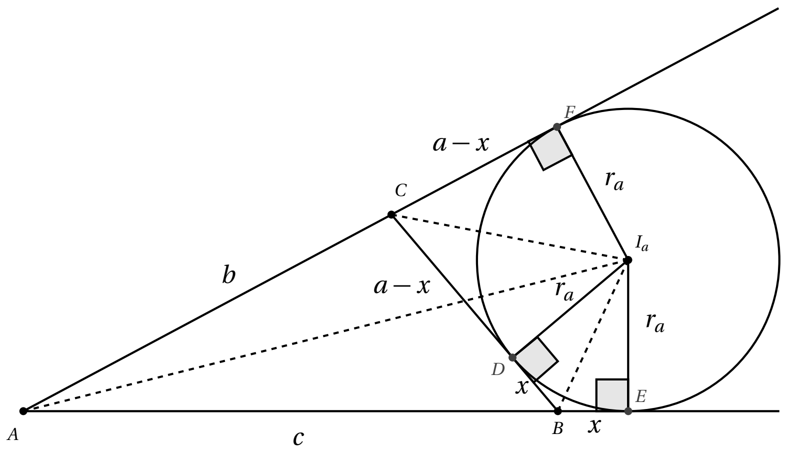
$$[ABC] = [AI_aE] + [AI_aF] - 2[BCI_a] \Leftrightarrow$$

$$[ABC] = \frac{(c+x)\cdot r_a}{2} + \frac{(b+a-x)\cdot r_a}{2} - 2\cdot\frac{a\cdot r_a}{2} \Leftrightarrow$$

$$[ABC] = \frac{r_a}{2}\cdot(a+b+c-2a) = \frac{r_a}{2}\cdot\big(2p-2a\big) = r_a(p-a).$$

Analogamente,

$$[ABC] = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$



Teorema 9. (Heron) Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente. Então, a área do triângulo ABC pode ser calculada por

$$[ABC] = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração 9. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABD e ACD, temos:
1. $c^2 = m^2 + h^2$.
2. $b^2 = (a-m)^2 + h^2$.
De (2), temos:

$$b^2 = (a-m)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = a^2 - 2am + c^2 \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Substituindo em (1), temos:

$$c^2 = \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

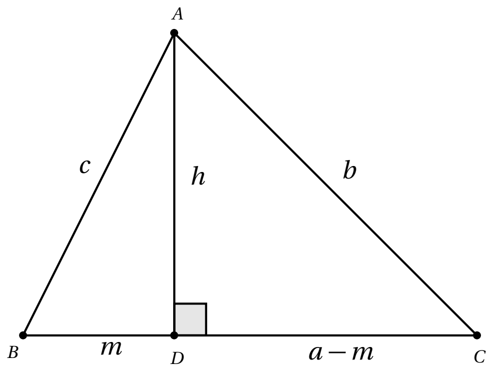
$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) \cdot \left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$h^2 = \left(\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$4a^2h^2 = [(a+c)^2 - b^2] \cdot [(b^2 - (a-c)^2] \Leftrightarrow$$

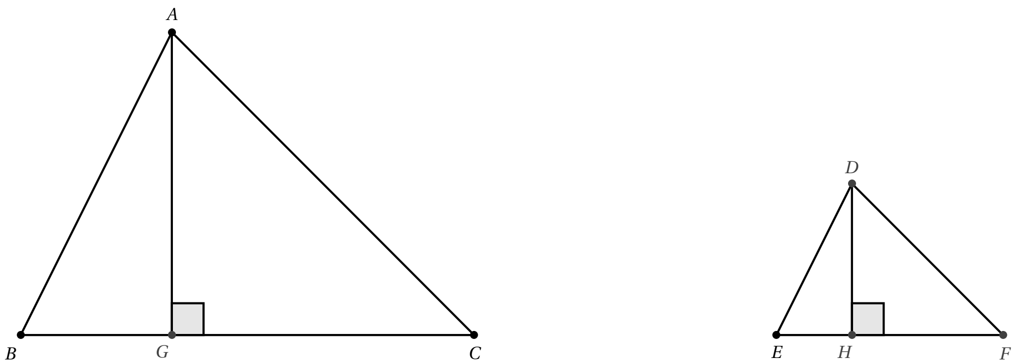
$$
\begin{aligned}
4a^2h^2 &= (a+c+b)\cdot(a+c-b)\cdot(b+a-c)\cdot(b+c-a) \Leftrightarrow\\
4a^2h^2 &= (a+b+c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a+b-c) \Leftrightarrow\\
4a^2h^2 &= 2p\cdot(2p-2a)\cdot(2p-2b)\cdot(2p-2c) \Leftrightarrow\\
\frac{a^2h^2}{4} &= p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c) \Leftrightarrow\\
[ABC]^2 &= p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c) \Leftrightarrow\\
[ABC] &= \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}.
\end{aligned}
$$



Teorema 10. Sejam ABC e DEF dois triângulos semelhantes tais que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$, então $\frac{[ABC]}{[DEF]} = k^2$.

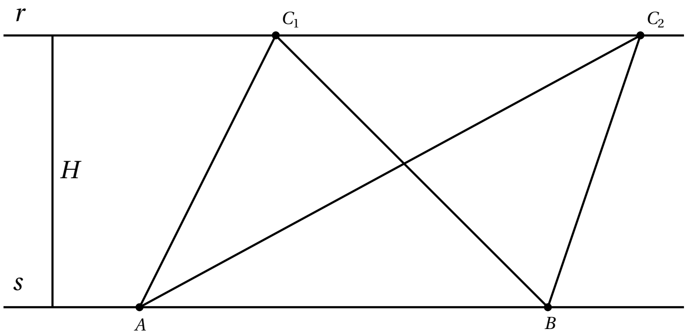
Demonstração 10. Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ com $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AG}{DH} = k$, então

$$
\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{\frac{BC\cdot AG}{2}}{\frac{EF\cdot DH}{2}} = \frac{BC}{EF}\cdot\frac{AG}{DH} = k\cdot k = k^2.
$$



Teorema 11. Sejam r e s retas paralelas. Sejam A e B pontos distintos sobre a reta s e C_1 e C_2 pontos distintos sobre a reta r. Então, $[ABC_1] = [ABC_2]$.

Demonstração 11. O resultado é imediato pois $[ABC_1] = [ABC_2] = \dfrac{AB \cdot H}{2}$.



Teorema 12. Seja ABC um triângulo e D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB tais que AD, BE e CF são concorrentes no ponto P. Defina $K = [ABC]$, $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Como $K = K_A + K_B + K_C$, então

(a)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \ \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C} \text{ e } \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

(b)

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \ \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B} \text{ e } \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}$$

Demonstração 12. (a) Temos que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{[BPD]}{[CPD]} = \frac{[ABD] - [BPD]}{[ACD] - [CPD]} = \frac{[APB]}{[ACP]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{K_A}{K_C}$ e $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{K_B}{K_A}$.

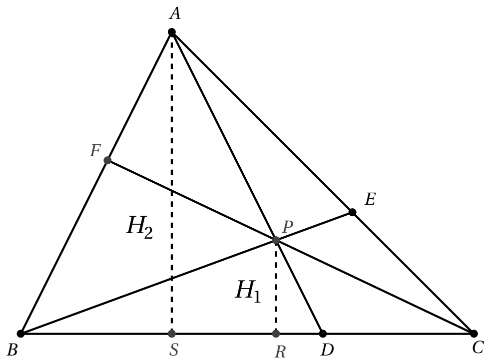
(b) Temos que

$$\Delta ADS \sim \Delta PDR \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{PD} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{[ABC]}{[BPC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{BP}{PE} = \dfrac{K_A + K_C}{K_B}$ e $\dfrac{CP}{PF} = \dfrac{K_A + K_B}{K_C}$.



Teorema 13. (**van Aubel**) Seja ABC um triângulo e sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que AD, BE e CF são concorrentes. Então

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}.$$

Demonstração 13. Do teorema 8 temos que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A} = \frac{K_B}{K_A} + \frac{K_C}{K_A} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$

Teorema 14. **(Área de quadrilátero convexo qualquer.)** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer tal que θ é o menor ângulo entre as diagonais. Então, $[ABCD] = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen}\theta}{2}$.

Demonstração 14. Temos que

$$[ABCD] = [APD] + [BPC] + [CPD] + [DPA] \Rightarrow$$

$$[ABCD] = \frac{PA \cdot PD \cdot \operatorname{sen}\theta}{2} + \frac{PA \cdot PB \cdot \operatorname{sen}\theta}{2} + \frac{PB \cdot PC \cdot \operatorname{sen}\theta}{2} + \frac{PC \cdot PD \cdot \operatorname{sen}\theta}{2} \Rightarrow$$

$$[ABCD] = \frac{(PA \cdot PD + PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PD)\operatorname{sen}\theta}{2} \Rightarrow$$

$$[ABCD] = \frac{(PA + PC)(PB + PD)\operatorname{sen}\theta}{2} \Rightarrow [ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen}\theta}{2}.$$

Teorema 15. (**Brahmagupta**) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível então sua área é dada por

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

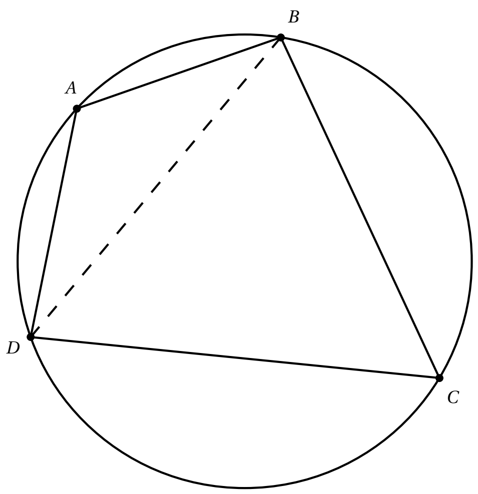
em que a, b, c, d são as medidas dos lados AB, BC, CD, DA, respectivamente, e $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Demonstração 15. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABD e BCD temos que

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A$$

e

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C.$$



Como o quadrilátero $ABCD$ é inscritível temos que $\angle C = 180° - \angle A$ e, com isso, $\cos\angle C = \cos(180° - \angle A) = -\cos\angle A$ e $BD^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle A$. Dessa forma,

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A = b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle A \Leftrightarrow \cos\angle A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)}.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{sen}^2\angle A = 1 - \cos^2\angle A = 1 - \left[\frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)}\right]^2 = \frac{[2(ad + bc)]^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2}{[2(ad + bc)]^2}$$

$$= \frac{[2(ad + bc) + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)][2(ad + bc) - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)]}{[2(ad + bc)]^2}. \qquad (1)$$

O primeiro fator do numerador de (1) é

$$2(ad+bc)+(a^2-b^2-c^2+d^2) = (a^2+2ad+d^2)-(b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2-(b-c)^2 = (a+d+b-c)(a+d-b+c).$$

Como $2p = a + b + c + d$ temos que $a + d + b - c = (a + b + c + d) - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$ e $a + d - b + c = (a + b + c + d) - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$, então

$$(a + d + b - c)(a + d - b + c) = 4(p - b)(p - c).$$

De maneira análoga o segundo fator do numerador é igual a $4(p - a)(p - d)$ e, com isso,

$$\operatorname{sen}^2\angle A = \frac{16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{[2(ad + bc)]^2} = \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ad + bc)^2}.$$

Como $0° < \angle A < 180°$, temos que $\operatorname{sen}\angle A$ é positivo, então

$$\operatorname{sen}\angle A = \frac{2\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{ad + bc}.$$

O quadrilátero $ABCD$ é composto pelos dois triângulos ABD e BCD. A área do triângulo ABD é

$$[BAD] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \operatorname{sen}\angle BAD = \frac{1}{2} ad \operatorname{sen}\angle A.$$

E a área do triângulo BCD é

$$[BCD] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DC \cdot \operatorname{sen}\angle BCD = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\angle C.$$

Mas $\text{sen}\angle C = \text{sen}(180° - \angle A) = \text{sen}\angle A$ então $[BCD] = \dfrac{1}{2}bc\ \text{sen}\angle A$.

Portanto,

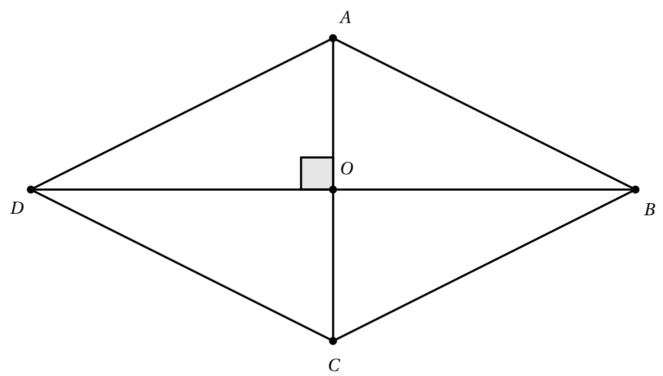
$[ABCD] = [ABD] + [BCD] = \dfrac{1}{2}ad\ \text{sen}\angle A + \dfrac{1}{2}bc\ \text{sen}\angle A = \dfrac{1}{2}(ad + bc)\,\text{sen}\angle A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Teorema 16. A área de um losango $ABCD$ é $[ABCD] = \dfrac{BD \cdot AC}{2}$.

Demonstração 16. Temos que $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ pelo caso **LLL** e, com isso, possuem a mesma área. Assim,

$$[ABCD] = [ABD] + [CBD] \Leftrightarrow [ABCD] = \frac{BD \cdot AO}{2} + \frac{BD \cdot CO}{2} \Leftrightarrow$$

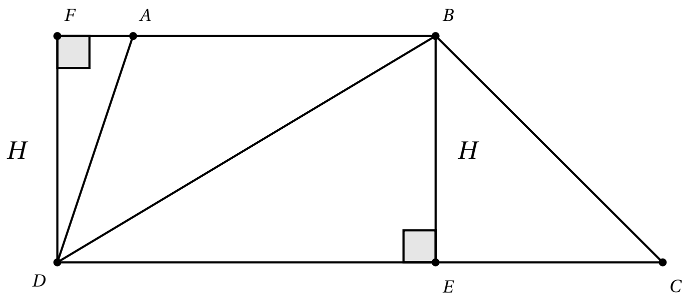
$$[ABCD] = \frac{BD \cdot (AO + CO)}{2} \Leftrightarrow [ABCD] = \frac{BD \cdot AC}{2}.$$



Teorema 17. A área de um trapézio $ABCD$ de bases AB e CD é $[ABCD] = \dfrac{(AB + CD) \cdot H}{2}$, em que H é a distância entre as bases.

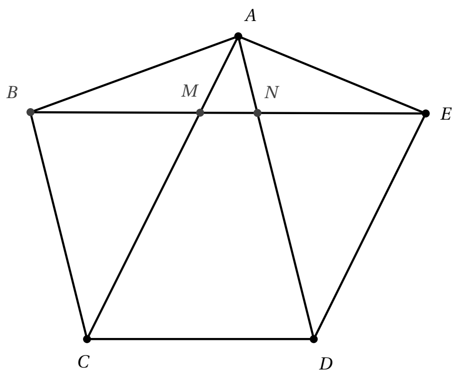
Demonstração 17. Trace a diagonal BD. Temos que

$$[ABCD] = [BCD] + [ABD] = \frac{CD \cdot H}{2} + \frac{AB \cdot H}{2} \Leftrightarrow [ABCD] = \frac{(AB + CD) \cdot H}{2}.$$



Exemplo 1. Seja $ABCDE$ um pentágono tal que os triângulos ABC, BCD, CDE, DEA e EAB possuem todos a mesma área. As retas AC e AD intersectam BE nos pontos M e N, respectivamente. Prove que $BM = EN$.

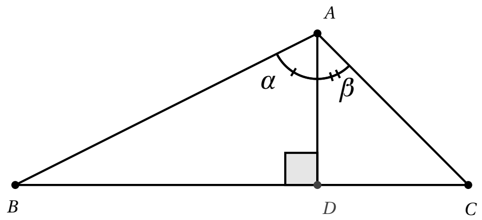
Solução. Se $[BCD] = [CDE]$ então, como os triângulos possuem a mesma base CD, suas alturas relativas a essa base são iguais.



Em outras palavras temos que $BE \parallel CD$. Da mesma forma temos que $CA \parallel DE$ e $BC \parallel AD$ implicando que os triângulos CMB e DEN são semelhantes pelo caso **AA**. Mas como as alturas relativas às bases BM e NE dos triângulos CMB e DEN são iguais então os triângulos são congruentes e, com isso, $BM = EN$.

Exemplo 2. Na figura abaixo, AD é uma altura com comprimento 1 e os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ são agudos. Usando a figura prove que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$$



Solução. Temos que $BD = \operatorname{tg}\alpha$ e $CD = \operatorname{tg}\beta$ e, com isso, $BC = BD + CD = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$. Além disso, $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{AB} \Leftrightarrow AB = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. De maneira análoga temos que $AC = \dfrac{1}{\cos\beta}$. Temos também que

$$[ABC] = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta).$$

Por outro lado,

$$[ABC] = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \operatorname{sen}\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta).$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$$

Exercícios propostos

1. (*) S é um ponto no interior do ΔABC tal que as áreas dos triângulos ABS, BCS, CAS são todas iguais. Prove que S é o baricentro de ABC.

2. (**) Os lados de um triângulo são expressos, em cm, por três inteiros consecutivos e sua área, em cm^2, é dada por um inteiro. Prove que o menor lado do triângulo é ímpar.

3. (***) Num triângulo ABC tem - se $AB = BC$, e D é um ponto sobre a base AC tal que o raio do círculo inscrito no triângulo ABD é igual ao raio do círculo tangente ao segmento DC e aos prolongamentos das retas BD e BC. Prove que o raio deste círculo é igual a $\dfrac{1}{4}$ da medida h de uma das alturas iguais do triângulo ABC.

4. (**) No triângulo ABC, os pontos L, M e N estão sobre BC, CA e AB respectivamente, e AL, BM e CN são concorrentes no ponto P.
(a) Encontre o valor numérico de
$$\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}$$
(b) Encontre o valor numérico de
$$\frac{AP}{AL} + \frac{BP}{BM} + \frac{CP}{CN}$$

5. (**) Se AD, BE e CF são três cevianas concorrentes no circuncentro O do triângulo ABC, demonstre que
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}.$$

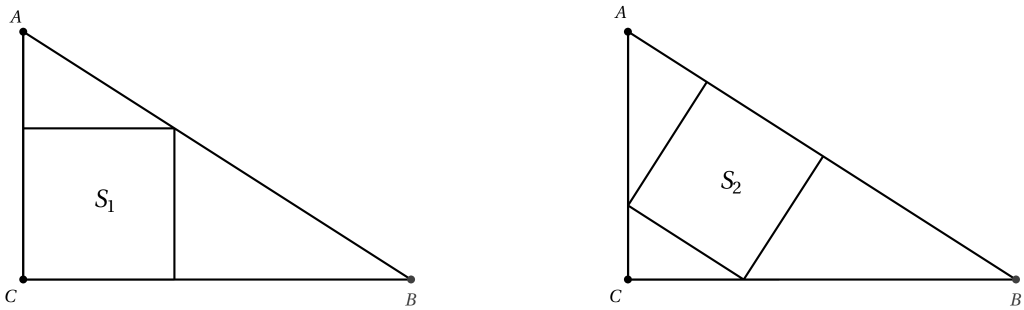
6. (**) Num triângulo ABC, A_1, B_1 e C_1 estão sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Dado que AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes no ponto O, e que $\frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} = 92$. Encontre o valor de $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{CO}{OC_1}$.

7. (***) Em um ΔABC, AD, BE e CF são concorrentes no ponto P tal que $AP = PD = 6$, $EP = 3$, $PB = 9$ e $CF = 20$. Qual é a área do ΔABC?

8. (*) (ITA) Sejam $ABCD$ um quadrado e E um ponto sobre AB. Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma proressão aritmética cuja soma é 200 cm^2, a medida do segmento AE, em cm, é igual a
(a) $\frac{10}{3}$. (b) 5. (c) $\frac{20}{3}$. (d) $\frac{25}{3}$. (e) 10.

9. (**) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo (não necessariamente regular) tal que os triângulos ABC, BCD, CDE, DEA e EAB tem área 1. Qual a área do pentágono?

10. (***) Quadrados S_1 e S_2 são inscritos em um triângulo retângulo ABC, como mostrado na figura abaixo. Determine $AC + CB$ se área$(S_1) = 441$ e área$(S_2) = 440$.



11. (*) (ITA) Considere um losango $ABCD$ cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.

12. (*) (ITA) Num triângulo ABC, D é o ponto médio do segmento AC e E é um ponto do segmento AB. Sabendo - se que $AB = 3AE$, determine a razão entre a área do quadrilátero $BCDE$ e a do triângulo ADE.

13. (*) (ITA) Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado AB e E um ponto do lado AC. Se $m(AB) = 8$ cm, $m(AC) = 10$ cm, $m(AD) = 4$ cm e $m(AE) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é
(a) $\frac{1}{2}$. (b) $\frac{3}{5}$. (c) $\frac{3}{8}$. (d) $\frac{3}{10}$. (e) $\frac{3}{4}$.

14. (*) (ITA) Num triângulo de lados $a = 3$ m e $b = 4$ m, diminuindo - se de $60°$ o ângulo que esses lados formam, obtém - se uma diminuição de 3 m^2 em sua área. Portanto, a área do triângulo inicial é de:
(a) 4 m^2 (b) 5 m^2 (c) 6 m^2 (d) 9 m^2 (e) 12 m^2

15. (*) (ITA) Num triângulo isósceles, o perímetro mede 64 m e os ângulos adjacentes são iguais ao arccos $\frac{7}{25}$.
Então a área do triângulo é de:
(a) 168 m^2 (b) 192 m^2 (c) 84 m^2 (d) 96 m^2 (e) 157 m^2

16. (*) (ITA) Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$.
Sabe - se que AB mede $2\sqrt{5}$ e BC mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

17. (**) Determine a área de um hexágono convexo que está inscrito em um círculo e tem três lados consecutivos iguais a 3 cm e os outros três com comprimentos iguais a 2 cm.

18. (**) As retas r, s e t são paralelas. A reta s está situada entre r e t de tal modo que a distância de s a r é 3 m e a distância de s a t é 1 m. Calcule a área de um triângulo equilátero onde os vértices se encontram sobre cada uma das três retas.

19. (**) O círculo inscrito do triângulo ABC é tangente ao lado AB em P e possui raio com medida 21. Se AP mede 23 e PB mede 27, determine a medida do perímetro do triângulo.

20. (**) Seja H o ortocentro de um triângulo tal que $AH = p$, $BH = q$ e $CH = r$. Prove que $aqr + brp + cpq = abc$.

21. (**) Prove que $r = 4R \operatorname{sen}\frac{\angle A}{2} \operatorname{sen}\frac{\angle B}{2} \operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}$, em que r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC, R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e A, B e C os ângulos internos do triângulo.

22. (**) Prove que $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C = 1 + \frac{r}{R}$, em que r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC, R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. (**Teorema de Carnot**)

23. (***) Em um triângulo ABC, $\angle A - \angle B = 120°$ e $R = 8r$, em que r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC, R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Determine $\cos\angle C$.

24. (****) Um trapézio retângulo com área 10 e altura 4 é dividido em dois trapézios menores circunscritíveis através de uma linha paralela às bases. Determine as medidas dos raios das circunferências inscritas dos trapézios menores.

25. (**) Os comprimentos das alturas do ΔABC são soluções da equação cúbica
$$x^3 + kx^2 + lx + m = 0.$$
Determine o raio do círculo inscrito no ΔABC.
(a) $\frac{k}{m}$ (b) $-\frac{l}{k}$ (c) $-\frac{l}{m}$ (d) $\frac{m}{k}$ (e) $-\frac{m}{l}$

26. (**) (EN) A área de um triângulo ABC cujos lados medem $AB = \sqrt{3} + 1$, $AC = \sqrt{2}$ e $BC = 2$ é:
(a) $\sqrt{3} - 1$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (c) $\sqrt{3} + 1$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (e) $2(\sqrt{3} + 1)$

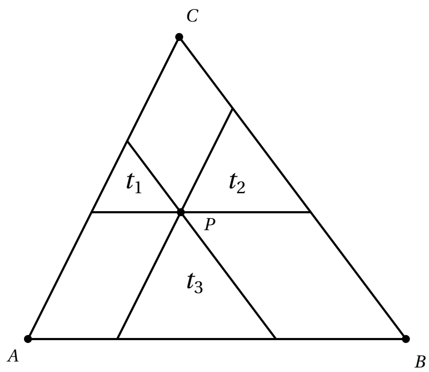
27. (***) Seja ω uma circunferência dada. Pontos A, B e C estão sobre ω de tal forma que o triângulo ABC é acutângulo. Pontos X, Y e Z estão também sobre ω de tal forma que $AX \perp BC$ em D, $BY \perp AC$ em E e $CZ \perp AB$ em F. Prove que o valor de
$$\frac{AX}{AD} + \frac{BY}{BE} + \frac{CZ}{CF}$$
não depende da escolha de A, B e C.

28. (***) (IME) Num triângulo ABC isósceles, com ângulos iguais em B e C, o seu incentro se encontra no ponto médio do segmento de reta que une o seu ortocentro H a seu baricentro G. O segmento de reta AG é menor que o segmento de reta AH. Os comprimentos dos segmentos de reta HI e IG são iguais a d. Determine o perímetro e a área desse triângulo em função de d.

29. (**) (IME) Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.
(a) $\frac{ab}{2}$ (b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (c) $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$ (d) $\left(\frac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$ (e) $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)a^2 b}$

30. (**) (CN) Seja ABC um triângulo com lados $AB = 15$, $AC = 12$ e $BC = 18$. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que $PC = 3AP$. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero $APQB$ seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?

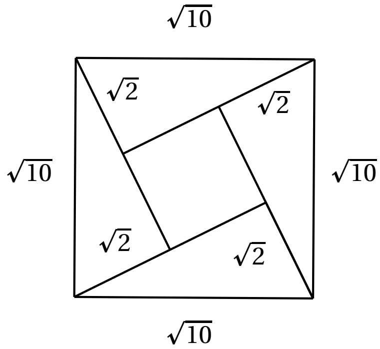
31. (**) (AIME) Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC. Retas paralelas aos lados são traçadas passando pelo ponto P resultando em triângulos menores t_1, t_2 e t_3 cujas áreas são 4, 9 e 49, respectivamente. Determine a área do triângulo ABC.



32. (*) (AFA) Seja ABC um triângulo retângulo em A, circunscrito por uma circunferência de raio r, e $\angle ABC = x$. A razão entre a área do triângulo e o quadrado da metade do valor da hipotenusa é
(a) $\text{sen}2x$. (b) $\frac{\text{sen}^2 x}{2}$. (c) $\frac{\cos^2 x}{2}$. (d) $\frac{\cos 2x}{2}$.

33. (*) (AFA) Dois vértices de um triângulo equilátero pertencem a dois lados de um quadrado cuja área é $1m^2$. Se o terceiro vértice do triângulo coincide com um dos vértices do quadrado, então, a área do triângulo, em m^2, é
(a) $2\sqrt{3}-1$. (b) $2\sqrt{3}+1$. (c) $-3+2\sqrt{3}$. (d) $3+\sqrt{3}$.

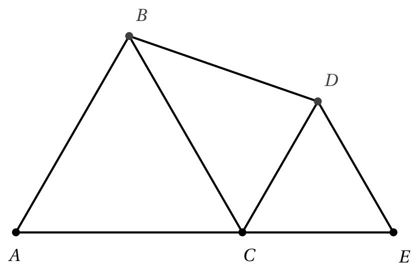
34. (*) (AFA) A área do quadrado menor, da figura abaixo, vale
(a) $\sqrt{2}$. (b) 2. (c) $\sqrt{5}$. (d) $\sqrt{8}$.



35. (*) (AFA) Seja um triângulo com dois de seus lados medindo $2m$ e $5m$ e área igual a $3m^2$. Se o ângulo entre esses dois lados do triângulo triplicar, a área do mesmo será aumentada, em quantos m^2?

(a) $\frac{36}{25}$ (b) $\frac{42}{25}$ (c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{14}{5}$

36. (*) (AFA) Na figura abaixo, os triângulos ABC e CDE são equiláteros. Se a razão entre as áreas desses triângulos é $\frac{9}{4}$ e o perímetro do menor é 12, então, a área do quadrilátero $ABDE$ é
(a) $2+\sqrt{3}$ (b) $9\sqrt{3}$ (c) $11-\sqrt{3}$ (d) $19\sqrt{3}$



37. (*) Os quadrados $ABED$, $BCGF$ e $CAIH$ são construídos externamente e sobre os lados de um triângulo ABC. Prove que os triângulos AID, BEF e CGH possuem a mesma área.

38. (*) Seja ABC um triângulo isósceles com $\angle A = 120°$. A reta perpendicular a AB traçada por A corta BC em D e divide o triângulo ABC em dois triângulos. Se o triângulo ABD possui área 11, determine a área do triângulo ABC.

39. (*) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de área 21 e O o ponto de intersecção de suas diagonais de tal forma que $[ABO] = 7$. Uma reta paralela a BD traçada por A corta a paralela a AC traçada por B em M. Determine a área do triângulo CDM.

40. (**) Seja ABC um triângulo retângulo em A e R o ponto médio de sua hipotenusa BC. Sobre o cateto maior AB marca - se o ponto P tal que $CP = BP$ e sobre o segmento BP marca - se o ponto Q tal que o triângulo PQR é equilátero. Se a área do triângulo ABC é 27, determine a área do triângulo PQR.

41. (***) As diagonais AC e BD de um quadrilátero convexo $ABCD$ cortam - se em E de tal forma que $\frac{CE}{AC} = \frac{3}{7}$ e $\frac{DE}{BD} = \frac{4}{9}$. Se P e Q são pontos que dividem o segmento BE em três partes iguais, com P entre B e Q, e seja R o ponto médio do segmento AE. Determine $\frac{[APQR]}{[ABCD]}$.

42. (**) Seja ABC um triângulo retângulo com $\angle BCA = 90°$ e seja H o pé da altura relativa ao vértice C. Se $AC = 15$ e $BH = 16$, determine a área do triângulo ABC.

43. (***) Um hexágono equiangular $ABCDEF$ é tal que $AB = CD = EF = 1$ e $BC = DE = FA = r$. Se a área do triângulo ACE mede 70% da área do hexágono, determine a soma dos possíveis valores de r.

44. (***) O círculo, de centro O, inscrito no triângulo ABC é cortado pela mediana AD nos pontos X e Y. Sabendo que $AC = AB + AD$, determine a medida do ângulo $\angle XOY$.

45. (**) (CN) Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intercepta L no ponto D. Sabendo - se que $AD = 4$ e $BC = 8$, calcule o raio de L e assinale a opção correta.
(a) $2\sqrt{10}$ (b) $4\sqrt{10}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) $4\sqrt{5}$ (e) $3\sqrt{10}$

46. (**) (CN) Seja ABC um triângulo acutângulo e L a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de L são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre as retas AB, AC e BC, respectivamente. Tomando $MN = 12$ e $PN = 16$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?
(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{9}{16}$ (c) $\frac{8}{9}$ (d) $\frac{25}{36}$ (e) $\frac{36}{49}$

47. (**) (CN) Seja ABC um triângulo retângulo com catetos $AC = 12$ e $AB = 5$. A bissetriz interna traçada de C intercepta o lado AB em M. Sendo I o incentro de ABC, a razão entre as áreas de BMI e ABC é:
(a) $\frac{1}{50}$. (b) $\frac{13}{60}$. (c) $\frac{1}{30}$. (d) $\frac{13}{150}$. (e) $\frac{2}{25}$.

48. (***) (EFOMM) As medidas dos lados AC, BC e AB de um triângulo ABC formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente. Os ângulos internos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ desse triângulo possuem a seguinte propriedade: $\text{sen}^2\angle A + \text{sen}^2\angle B - \text{sen}^2\angle C - 2\,\text{sen}\angle A\,\text{sen}\angle B\,\text{sen}\angle C = \cos^2\angle C$. Se o perímetro do triângulo ABC mede $3\sqrt{3}$ m, sua área, em m^2, é igual a:
(a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. (b) $\frac{3}{4}$. (c) $\frac{9}{8}$. (d) 2. (e) 4.

49. (**) (EFOMM) Um triângulo obtusângulo ABC tem 18 cm de perímetro e as medidas de seus lados formam uma progressão aritmética crescente (AB, AC, BC). Os raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo ABC medem, respectivamente, r e R. Se $\text{sen}\angle A = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{sen}\angle B = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, então o produto $r \cdot R$, em cm^2, é igual a

(a) $\dfrac{35}{9}$. (b) $6\sqrt{6}$. (c) $3\sqrt{15}$. (d) $\dfrac{16}{3}$. (e) 1.

50. (*) (ITA) Em um triângulo ABC considere conhecidos os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CBA$ e a medida d do lado AB. Nessas condições, a área S desse triângulo é dada pela relação:
(a) $S = \dfrac{d^2}{2\,\text{sen}(\angle BAC + \angle CBA)}$. (b) $S = \dfrac{d^2\,\text{sen}\angle BAC\,\text{sen}\angle CBA}{2\,\text{sen}(\angle BAC + \angle CBA)}$. (c) $S = \dfrac{d^2\,\text{sen}\angle CBA}{2\,\text{sen}(\angle BAC + \angle CBA)}$.
(d) $S = \dfrac{d^2\,\text{sen}\angle BAC}{2\cos(\angle BAC + \angle CBA)}$. (e) $S = \dfrac{d^2\,\text{sen}\angle BAC\,\text{sen}\angle CBA}{2\cos(\angle BAC + \angle CBA)}$.

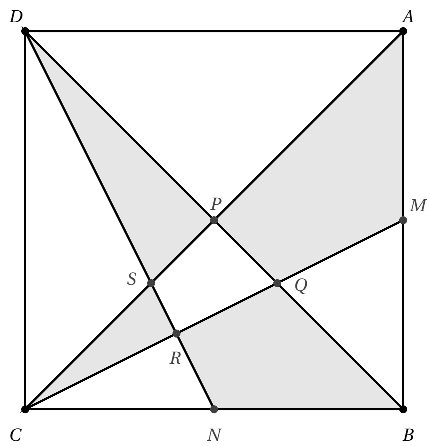
51. (**) (ITA) Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um desses lados. Sabe - se que a, b, c, nessa ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e $\dfrac{\cos\angle A}{a} + \dfrac{\cos\angle B}{b} + \dfrac{\cos\angle C}{c} = \dfrac{77}{240}$, então, sua área, em cm^2, mede
(a) $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$. (b) $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$. (c) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. (d) $\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$. (e) $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$.

52. (**) Seja ABC um triângulo retângulo tal que $\angle C = 90°$, $CA = 8$ e $CB = 6$. Um semicírculo de diâmetro CX, com $x \in AC$, tangencia o lado AB. Determine a medida do raio do semicírculo.

53. (**) Seja ABC um triângulo retângulo com $\angle A = 90°$ e altura AD. Sejam r, s e t os raios das circunferências inscritas nos triângulos ABC, ADB e ADC, respectivamente. Prove que $r + s + t = AD$.

54. (***) Seja I o incentro do triângulo ABC. Prove que
$$\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ac} + \frac{CI^2}{ab} = 1.$$

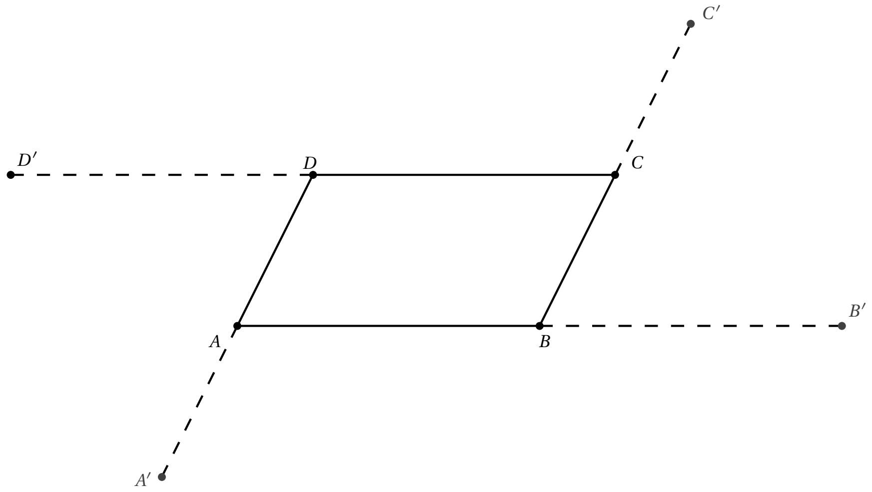
55. (****) (FGV) Na figura, AC e BD são diagonais do quadrado $ABCD$ de lado x, M e N são os pontos médios de AB e BC, respectivamente.



(a) Calcule a área da região sombreada na figura, em função de x.
(b) Calcule o perímetro do quadrilátero $PQRS$, em função de x.

56. (*) (FGV) Um triângulo isósceles tem os lados congruentes com medida igual a 5. Seja α a medida do ângulo da base, para a qual a área do referido triângulo é máxima. Podemos afirmar que
(a) $10° \leq \alpha < 20°$. (b) $20° \leq \alpha < 30°$. (c) $30° \leq \alpha < 40°$. (d) $40° \leq \alpha < 50°$. (e) $50° \leq \alpha < 60°$.

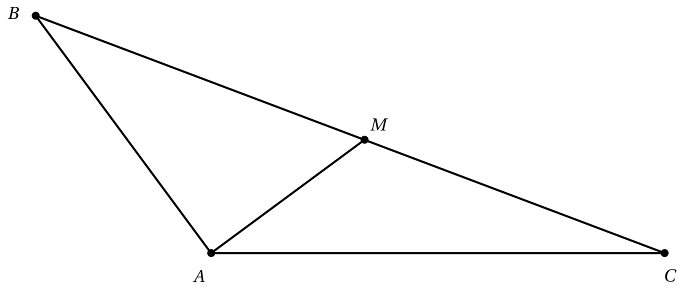
57. (**) (Fuvest) Percorre - se o paralelogramo $ABCD$ em sentido anti - horário. A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga - se o lado recém - percorrido, construindo - se um segmento de mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A', B', C' e D', de modo que os novos segmentos sejam, então, AA', BB', CC' e DD'. Dado que $AB = 4$ e que a distância de D à reta determinada por A e B é 3, calcule a área do
(a) paralelogramo $ABCD$;
(b) triângulo $BB'C'$;
(c) quadrilátero $A'B'C'D'$.



58. (*) (Fuvest) O segmento AB é lado de um hexágono regular de área $\sqrt{3}$. O ponto P pertence à mediatriz de AB de tal modo que a área do triângulo PAB vale $\sqrt{2}$. Então a distância de P ao segmento AB é igual a
(a) $\sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2}$. (c) $3\sqrt{2}$. (d) $\sqrt{3}$. (e) $2\sqrt{3}$.

59. (*) (Fuvest) As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam - se externamente. Uma reta t é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta O_1O_2 no ponto Q. Sendo assim, determine:
(a) o comprimento P_1P_2;
(b) a área do quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$;
(c) a área do triângulo QO_2P_2.

60. (**) (Fuvest) No triângulo ABC da figura, a mediana AM, relativa ao lado BC, é perpendicular ao lado AB. Sabe - se também que $BC = 4$ e $AM = 1$. Se α é a medida do ângulo $\angle ABC$, determine
(a) senα;
(b) o comprimento AC;
(c) a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB;
(d) a área do triângulo AMC.



61. (**) Seja ABC um triângulo isósceles tal que $AB = 2$ e $\angle ABC = 90°$. Seja D o ponto médio de BC e E o ponto sobre AC tal que a área do quadrilátero $AEDB$ é o dobro da área do triângulo ECD. Determine o comprimento de DE.

62. (**) Seja $ABCD$ um trapézio tal que $AB \parallel CD$. Seja P a intersecção da diagonal AC com a diagonal BD. Se a área do triângulo PAB é 16 e a área do triângulo PCD é 25, determine a área do trapézio.

63. (*) Sejam E e F pontos no interior do retângulo $ABCD$ tais que $AE = DE = BF = CF = EF$ se $AB = 11$ e $BC = 8$, determine a área do quadrilátero $AEFB$.

64. (**) Seja ABC um triângulo e D, E e F pontos sobre os lados AC, AB e BC, respectivamente, tais que $CDEF$ é um paralelogramo. Se as áreas dos triângulos ADE e BEF medem, respectivamente, a e b, prove que a área do triângulo ABC mede $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

65. (**) Seja $ABCD$ um trapézio tal que $AB \parallel DC$, $AB = 8$, $BC = 6\sqrt{2}$, $\angle BCD = 45°$ e $\angle DAB = 120°$. Determine a área do trapézio.

66. (*) (IME) Seja ABC um triângulo de lados AB, BC e AC iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:
(a) $\frac{\sqrt{104}}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{104}}{3}$ (c) $\frac{2\sqrt{104}}{3}$ (d) $\sqrt{104}$ (e) $3\sqrt{104}$

67. (***) (IME) Seja x o valor do maior lado de um paralelogramo $ABCD$. A diagonal AC divide $\angle A$ em dois ângulos iguais a 30° e 15°. A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que não o contém forma o quadrilátero $A'B'C'D'$. Calcule o perímetro de $A'B'C'D'$.

68. (**) (IME) Os raios dos círculos circunscritos aos triângulos ABD e ACD de um losango $ABCD$ são, respectivamente, $\frac{25}{2}$ e 25. A área do losango $ABCD$ é
(a) 100 (b) 200 (c) 300 (d) 400 (e) 500

69. (***) (IME) Seja G o ponto de intersecção das medianas de um triângulo ABC com área S. Considere os pontos A', B' e C' obtidos por uma rotação de 180° dos pontos A, B e C, respectivamente, em torno de G. Determine, em função de S, a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e $A'B'C'$.

70. (**) (IME) Um trapézio $ABCD$, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem $MM'N'N$. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou - se que as mesmas se encontram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área

do trapézio $M'ND$ em função da área de $ABCD$.

71. (*) (ITA) Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ cm^2. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede
(a) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (b) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. (c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (d) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. (e) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

72. (*) (ITA) Seja λ uma circunferência de raio 4 cm e PQ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam - se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo PQR, em cm^2, é igual a
(a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. (c) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. (d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$. (e) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Respostas.

4. (a) 1 (b) 2 6. 94 7. 108 8. c 9. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ 10. 462 11. 144π cm^2 12. 5 13. d 14. c 15. a 16. 6 17. $\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$ 18. $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$/ 19. 345/ 23. $\dfrac{7}{8}$ 24. $\dfrac{4}{3}$ e $\dfrac{2}{3}$ 25. e 26. b 28. Área: $\dfrac{15d^2\sqrt{15}}{4}$ e perímetro: $5d\sqrt{15}$ 29. c 30. $BQ=6$ 31. 144 32. A 33. C 34. C 35.D 36. D 38. $\dfrac{33}{2}$ 39. 14 40. $\dfrac{9}{2}$ 41. $\dfrac{10}{63}$ 42. 150 43. 6 44. 120° 45. C 46. A 47. D 48. C 49. D 50. B 5 1. A 52. 3 55. (a) $\dfrac{2x^2}{5}$ (b) $\dfrac{5\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{15}$ 56. D 57. (a) 12 (b) 12 (c) 60 58. E 59. (a) 12 (b) 90 (c) 96 60. (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\sqrt{7}$ (c) 2 (d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 61. $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ 62. 81 63. 32 65. $66+6\sqrt{3}$ 66. D 67. $x\sqrt{2}(1+\sqrt{2-\sqrt{3}})$ 68. D 69. $\dfrac{4}{3}S$ 70. $\dfrac{5}{12}S_{ABCD}$ 71. B 72. E