Geometria - Ângulos

Gustavo Empinotti - gustavoempinotti@gmail.com

Janeiro/2019

Em problemas de geometria, é muito importante saber calcular os ângulos da figura. Às vezes o problema pede explicitamente para você calcular algum ângulo ou provar alguma igualdade entre ângulos. Mas mesmo quando isso não acontece, marcar os ângulos da figura pode ajudar.

No meio olímpico, nós chamamos o processo de marcar ângulos de **arrastão.** O arrastão consiste em nomear alguns ângulos da figura (por exemplo, de α) e calcular os outros em função de α. Por exemplo, se num triângulo retângulo tivermos $\angle ABC = 90°$ e $\angle BAC = \alpha$, então $\angle BCA = 90 - \alpha$.

Ferramentas

1. **Triângulo isósceles:** Uma das ferramentas mais importantes é: se num triângulo ABC, temos $AB = BC$, então dizemos que ABC é isósceles, e temos que $\angle BAC = \angle BCA$.

2. **Triângulo retângulo:** No triângulo retângulo ABC, se M é o ponto médio de BC, então $AM = BM = CM$ (M é o circuncentro de ABC).

3. **Retas paralelas:** Se temos duas retas paralelas r e s e traçamos uma transversal, então os ângulos alternos são iguais.

4. **Base média:** Num triângulo ABC, se D e E são os pontos médios de BC e AC respectivamente, então DE é paralela a AB, e $\angle CDE = \angle CBA$. Além disso, $DE = \frac{AB}{2}$

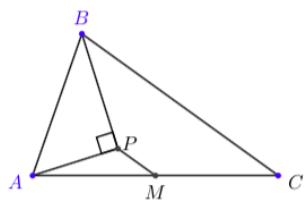
5. **Quadriláteros cíclicos:** Provavelmente a ferramenta mais útil em problemas de geometria, que usamos toda a hora, são quadriláteros cíclicos e ângulos na circunferência em geral. Isso ajuda muito no arrastão!

   Um quadrilátero $ABCD$ é dito inscritível quando seus quatro pontos estão sobre uma circunferência. Nesse caso, a soma dos ângulos opostos é 180°. Além disso, ângulos que olham para o mesmo lado (por exemplo, $\angle ACB$ e $\angle ADB$, que olham para AB) são iguais.

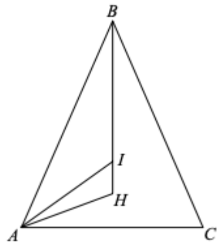
   Além disso (e essa é a parte mais poderosa) qualquer uma das condições acima (sobre ângulos) é suficiente para determinar que o quadrilátero é inscritível.

1 Problemas

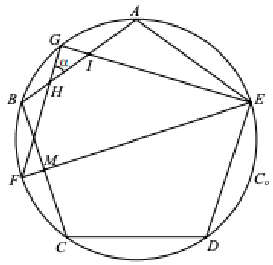
1. No triângulo ABC abaixo, BP é bissetriz do ângulo B e M é o ponto médio do lado AC. Se $AB = 6$ e $BC = 10$, calcule PM.



2. No triângulo ABC abaixo, I é o encontro das bissetrizes e H é o encontro das alturas. Sabe-se que $\angle HAI = \angle HBC = \alpha$. Determine α.



3. Na figura a seguir, o pentágono regular $ABCDE$ e o triângulo EFG estão inscritos na circunferência C_o e M é o ponto médio de BC. Para qual valor de α, em graus, os triângulos EFG e HIG são semelhantes?



4. Seja ABC um triângulo acutângulo e H o seu ortocentro. Sejam M, N e R os pontos médios de AB, BC e AH respectivamente. Determine a medida do ângulo $\angle MNR$ se o ângulo $\angle ABC$ mede $70°$

5. Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = BC$, prove que API é um triângulo isósceles.

6. Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 100°$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC. Prove que $AD + BD = BC$.

7. Seja M um ponto no interior de um quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $ABMD$ é um paralelogramo. Prove que se $\angle CBM = \angle CDM$, então $ACD = \angle BCM$.

8. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a intersecção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.