Círculos: Apolônio, ortogonalidade e inversão

Gustavo Empinotti - gustavoempinotti

Janeiro 2019

1 Introdução

Teorema: Seja AB um segmento e k um número positivo, $k \neq 1$. O lugar geométrico dos pontos D tais que $\frac{AD}{BD} = k$ é um círculo (no caso degenerado $k = 1$, o lugar geométrico é a mediatriz)

Obs: Esse assunto é comumente tratado com segmentos direcionados, de modo que $k = -1$ seria o caso da mediatriz. Eu opto por não usar segmentos direcionados. Toda medida de segmento, aqui, é positiva.

Prova: é fácil ver por um argumento algébrico que há exatamente dois pontos M e N sobre a reta AB, um interior e um exterior ao segmento, tais que $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN} = k$. Considere um ponto D no plano tal que $\frac{AD}{BD} = k$. Pelo teorema da bissetriz, DM é bissetriz interna e DN é bissetriz externa de $\angle ADB$. Portanto $\angle MDN = 90^o$ e D pertence ao círculo de diâmetro MN.

Reciprocamente, seja D um ponto no círculo de diâmetro MN. Por hipótese, $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}$, de modo que $A, B; M, N$ é uma quádrupla harmônica. Mas $\angle MDN = 90^o$. Aqui usamos um lema que merece destaque:

Lema: Seja $A, B; M, N$ uma quádrupla harmônica. Se D é um ponto do plano com $\angle MDN = 90^o$, então DM e DN são as bissetrizes interna e externa de $\angle ADB$

[Veja que, como as bissetrizes interna e externa são sempre perpendiculares, esse lema é uma espécie de recíproca do fato de que os dois pés das bissetrizes com respeito a um lado do triângulo fazem quádruplas harmônica com os respectivos vértices]

Prova: Trace uma reta l paralela a DN cortando DA, DM e DB em X, Y e Z. Como l é paralela a DN, Y tem que ser o ponto médio de XZ (conjugado do ponto do infinito). Mas $\angle DYZ = \angle YDN = 90^o$ portanto DXZ é isósceles e DY é bissetriz de $\angle XDZ$.

Como você já deve ter percebido, uma caracterização mais útil do círculo de Apolônio é como o lugar geométrico dos pontos D tais que DC é bissetriz de $\angle ADB$, onde C é um ponto sobre AB

Problemas

1. Prove a caracterização da simediana: num triângulo ABC, seja D o ponto de encontro das tangentes em B e C ao circuncírculo de ABC. Prove que AD é isogonal à mediana relativa ao lado BC.

2. Seja Γ o incírculo do triângulo escaleno ABC, e sejam D, E e F seus pontos de tangência aos lados BC, CA e AB respectivamente. A reta EF corta BC em G. O círculo de diâmetro GD corta Γ em $R \neq D$. Sejam P, Q as interseções (distintas de R) de Γ com BR e CR respectivamente. As retas BQ e CP se cortam em X. O circuncírculo de CDE corta QR em M e o circuncírculo de BDF corta PR em N. Prove que PM, QN e RX são concorrentes.

2 Os círculos de Apolônio de um triângulo

Sendo assim, em um triângulo ABC, podemos olhar para o círculo de Apolônio de razão $\frac{AC}{BC}$ com respeito a AB. Ele passa pelo pé das bissetrizes interna e externa com relação a C. Esse círculo é muito importante.

Para obter os próximos resultados, cujas provas omito, considere a seguinte figura: um triángulo ABC com os pés das bissetrizes interna e externa M e N respectivamente, com respeito a C. O triângulo MCN é retângulo. Considere o circuncentro O de ABC e trace a tangente a $\circ ABC$ em C, que corta AB em D. Apenas marcando ângulos, você pode provar que:

Lema 1: D é o centro do círculo de Apolônio de ABC com respeito a C.

Lema 2: O círculo de Apolônio com respeito a C é ortogonal ao circuncírculo do ABC (leia abaixo se você não sabe o que são círculos ortogonais)

Dois círculos são ditos ortogonais quando eles se intersectam e suas tangentes nos pontos de interseção são perpendiculares. Abaixo uma formulação alternativa:

Lema 3: Dois círculos Γ_1 e Γ_2 são ortogonais se e somente se eles se intersectam em A (e B) e a tangente a Γ_1 em A passa pelo centro de Γ_2.

Finalmente, o resultado que torna os círculos de Apolônio de um triângulo tão poderosos (e o motivo porque vale a pena entender círculos ortogonais)

Teorema: numa inversão com respeito ao círculo ω, os círculos fixados (i.e. círculos Γ tais que $\Gamma' = \Gamma$) são exatamente os círculos ortogonais a ω.

Problemas

1. Dados quatro pontos A_1, A_2, A_3, A_4 no plano, sem três colineares, tais que
$$A_1A_2.A_3A_4 = A_1A_3.A_2A_4 = A_1A_4.A_2A_3,$$
seja O_i o circuncentro de $\triangle A_jA_kA_l$ onde $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$. Suponha também $A_i \neq O_i$ $\forall i$. Prove que as quatro retas A_iO_i, para $i = 1,2,3,4$, concorrem ou são paralelas.

3 Apolônio e inversão

Outra relação entre círculos de Apolônio e inversão surge quando perguntamos sob quais condições dois segmentos têm a mesma medida após inversão.

Lembrando da fórmula $A'B' = \frac{AB.r^2}{OA.OB}$ (se você nunca viu, deduza), temos:
$$A'B' = B'C' \leftrightarrow \frac{AB.r^2}{OA.OB} = \frac{BC.r^2}{OB.OC} \leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{OA}{OC}$$
i.e., O deve pertencer ao círculo de Apolônio do ABC com respeito a B. Assim, muitas vezes, quando lhe é dada uma condição de círculo de Apolônio, inverter pode ajudar, pois cria triângulos isósceles.

Problemas

1. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC, com $AC \neq BC$. As retas AP, BP, e CP encontram novamente o circuncírculo Γ de ABC em K, L e M, respectivamente. A tangente a Γ em C encontra AB em S. Prove que $SC = SP \Leftrightarrow MK = ML$

2. O quadrilátero $ABCD$ está inscrito no círculo ω. Suponha que ADC é agudo e $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}$. O círculo γ passa por A e D e tangencia a reta AB. O ponto E está sobre γ e dentro de $ABCD$. Prove que
$$AE \perp EC \Leftrightarrow \frac{AE}{AB} - \frac{ED}{AD} = 1$$

Mais problemas

1. Sobre os lados AC e AB de um triângulo acutângulo ABC, escolhem-se pontos M e N, respectivamente. Sejam P a interseção entre BM e CN e Q um ponto no interior do quadrilátero $ANPM$ para o qual $\angle BQC = 90°$ e $\angle BQP = \angle BMQ$. Se $ANPM$ é inscritível, mostre que $\angle QNC = \angle PQC$.

2. O círculo k de centro O passa pelos vértices A e C do triângulo ABC e intersecta os lados AB e BC nos pontos K e L, respectivamente. O circuncírculo do triângulo KBL intersecta o circuncírculo em M, diferente de B. Prove que $OM \perp MB$.

3. Sejam M e N pontos distintos do plano do $\triangle ABC$ tais que $AM : BM : CM = AN : BN : CN$. Prove que MN contém o circuncírculo de $\triangle ABC$.

4. Seja I o incentro do $\triangle ABC$ e D a interseção de AI e BC. Seja M um ponto qualquer sobre o circuncírculo de IBC. Prove que a reta MI bissecta $\angle AMD$.

5. O ângulo $\angle COD$ foi obtido da rotação do ângulo $\angle AOB$, de modo que OC corresponde a OA e OD, a OB. Dois círculos tangenciam os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$, respectivamente, e se cortam em E e F. Prove que $\angle AOE = \angle DOF$.

Problemas variados

1. Um triangulo ABC esta inscrito num círculo γ. Uma reta variavel l paralela a BC intersecta os segmentos AB e AC nos pontos D e E respectivamente, e intersecta γ nos pontos K e L (onde D esta entre K e E). O circuloω_1 e tangente aos segmentos KD e BD e tambem tangente a γ, enquanto o circulo ω_2 e tangente aos segmentos LE e CE e tambem tangente a γ. Determine o lugar geometrico, enquanto l varia, do encontro das tangentes internas comuns a γ_1 e γ_2.

2. Seja ABC um triângulo e Γ seu circuncírculo. Seja D um ponto sobre BC e E um ponto sobre BA de modo que $DEAC$ é cíclico. Seja G a segunda interseção de AD com Γ e H a segunda interseção de CE com Γ. As retas tangente a Γ em A e C respectivamente cortam DE em L e M. Prove que LH e MG se cortam sobre Γ.

3. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito na circunferência Γ. A tangente em B a Γ corta AD em M; a tangente em C a Γ corta AD em N. Seja E a interseção de MC e NB, F a interseção de AE e BC, e L o ponto médio de BC. Prove que o circuncírculo de DLF é tangente a Γ.

4. Em um triângulo não-isósceles ABC, sejam D, E e F os pontos médios dos lados BC, CA, e AB respectivamente. O círculo BCF e a reta BE se encontram novamente em P, e o círculo ABE e a reta AD se encontram novamente em Q. Finalmente, as retas DP e FQ se encontram em R. Prove que o baricentro G do triângulo ABC está sobre o círculo PQR.

5. Seja ABC um trângulo e sejam I e O seu incentro e circuncentro, respectivamente. Seja ω_A o círculo que passa por B e C e é tangente ao incírculo de ABC; os círculos ω_B e ω_C são definidos de maneira análogoa. Os círculos ω_B e ω_C se encontram em A' distinto de A; os B' e C' são definidos de maneira semelhante. Prove que as retas AA', BB' e CC' concorrem em um ponto sobre a reta IO.

6. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo ω. As retas AB e CD se encontram em P, as retas AD e BC se encontram em Q, e as diagonais AC e BD se encontram em R. Seja M o ponto médio do segmento PQ, e seja K o ponto comum entre o segmento MR e o círculo ω. Prove que o circuncentro do triângulo KPQ e ω são tangentes.

7. Fixe um círculo Γ, uma reta ℓ tangente a Γ, e outro círculo Ω que não toca ℓ, de modo que Γ e Ω estão em lados opostos de ℓ. As tangentes a Γ de um ponto X variável em Ω encontram ℓ em Y e Z. Prove que, quando X varia sobre Ω, o circuncírculo de XYZ é tangente a dois círculos fixados.

References

[1] Mais sobre o assunto em *As Crônicas de Nérdia: o Círculo, a Rotação e os Isogonais*, Carlos Shine.