

Métodos em contagens

Bijeções, Contagens Duplas, Recorrências e Funções Geratrizes

Gustavo Empinotti - gustavoempinotti@gmail.com

Janeiro 2019

Problemas de contagens são uma das principais categorias de problemas de Combinatória. Nessa aula vamos estudar algumas das técnicas para resolvê-los! Primeiro, vamos precisar do básico:

Fato básico 1: Qual o número de maneiras que podemos escolher k objetos dentre um total de n ? Por exemplo, qual o número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ com k elementos?

Solução: Temos n opções para o primeiro elemento, $(n - 1)$ para o segundo, etc., até $(n - k + 1)$ para o k -ésimo. Isso nos dá $n \cdot (n - 1) \dots (n - k + 1)$ opções, que pode ser escrito como $\frac{n!}{(n-k)!}$. Porém aqui estamos levando em consideração a ordem; isto é, estamos considerando o conjunto $\{a, b, c\}$ como diferente do $\{b, c, a\}$, o que não é o objetivo. Logo, contamos cada conjunto $k!$ vezes. Então, podemos dividir por $k!$ para corrigir. O número desejado é $\frac{n!}{(n-k)!k!}$. Esse número é denotado $\binom{n}{k}$.

Esta contagem é importante! Guarde-a bem:

Número de subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Fato básico 2: Usando um argumento semelhante, veja que o número de permutações (ou anagramas) da palavra MISSISSIPPI é $\frac{11!}{1!4!4!2!}$ (e essa fórmula é generalizável, é claro).

1 Contagem direta - bijeções e contagem dupla

1.1 Bijeção

Uma bijeção é uma correspondência 1-para-1 entre conjuntos. O que significa ser 1-para-1?

Considere o conjunto de duplas ordenadas nos inteiros, como $(1, 2)$, $(5, 3)$, etc. Considere a correspondência (formalmente, uma função) que leva uma dupla na sua “reflexão”, por exemplo, $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Podemos escrever $f(1, 2) = (2, 1)$. Ela é uma bijeção porque para cada dupla (x, y) , existe uma única dupla (a, b) tal que $f(a, b) = (x, y)$. Isso é verdade porque conseguimos fazer o caminho inverso da correspondência e dizer que $(a, b) = (y, x)$.

Considere, agora, a função que leva uma dupla no seu primeiro elemento, $g(x, y) = x$. g não é uma bijeção porque $g(1, 2) = 1$, por exemplo, mas $g(1, 3) = 1$ também.

Para usar bijeções em problemas de contagens, iremos construir correspondências entre o conjunto que queremos contar, e um outro conjunto, mais fácil de contar. Quando fazemos isso para conjuntos finitos, os conjuntos têm que ter a mesma quantidade de elementos! Fazemos isso através de uma transformação do objeto que estamos contando.

Problema 1) Considere um tabuleiro 10×10 . Uma formiga está no canto inferior esquerdo e quer chegar ao canto superior direito. Para isso, ela quer fazer um caminho de tamanho exatamente 20 (em outras palavras, ela anda sobre as arestas do tabuleiro, e ela só vai para cima e para a direita). De quantas maneiras ela pode fazer isso?

Solução: a formiga sempre vai dar 10 passos para cima e 10 para a direita. Se codificarmos cima como C e direita como D, podemos fazer uma correspondência entre os caminhos desejados e sequências do tipo CCCCCCCCCDDDDDDDDDD. Verifique que isso é uma bijeção! (dada uma sequência de 10 Cs e 10 Ds, existe um único caminho da formiga). Segue que a quantidade é $\binom{20}{10}$.

Problema 2) Quantas soluções nos inteiros não-negativos tem a equação $a + b + c = 10$?

Solução: Se pensarmos no “10” como 10 bolinhas, queremos dividir essas 10 bolinhas em grupos de 3. Podemos pensar nas divisões entre esses grupos como os sinais de “+”. Assim, a solução $3 + 1 + 6 = 10$ seria correspondente a $\circ \circ \circ + \circ + \circ \circ \circ \circ \circ \circ$. Verifique que isso é uma bijeção!

Segue que o número de soluções é a quantidade de formas de ordenar 12 elementos, sendo 10 de um tipo (bolinhas) e 2 de outro (sinal de +). Ou seja, a quantidade de anagramas de AAAAAAAAAABB. Isso é dado por $\binom{12}{2}$.

Essa contagem também aparece bastante - ela é generalizável (ela dá o número de soluções de $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$). Ela é conhecida como “fórmula das bolas nas urnas.”

Exercícios

1.1) Quantos subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, \dots, 30\}$ têm a soma de seus elementos maior que 232?

1.2) Quantas sequências estritamente crescentes de inteiros positivos começam com 1 e terminam com 1000?

1.3) De quantas maneiras podemos colocar v bolas vermelhas e b bolas brancas em n caixas de modo que cada caixa contenha pelo menos uma bola de cada cor?

Às vezes podemos também provar que duas quantidades interessantes são iguais, mas sem conseguir calcular essa quantidade!

1.4) Para qualquer conjunto finito, prove que o número de subconjuntos de tamanho par é igual ao número de subconjuntos de tamanho ímpar (resolva com uma bijeção!)

1.5) Prove que o número de partições não-ordenadas de n em k partes é igual ao número de partições de n em que a maior parte é igual a k .

Nota: Uma partição de n é uma sequência não-ordenada cuja soma é n . As partições de 6, por exemplo, em 3 partes são $\{1, 1, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2\}$; as partições em que a maior parte é 3 são $\{1, 1, 1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 3\}$, a quantidade de ambas é 3.

Dica: use bolinhas.

\circ
 \circ
 $\circ \circ \circ \circ$

1.6) Prove que o número de partições não-ordenadas de n em partes ímpares é igual ao número de partições de n em partes distintas.

Nota: Por exemplo, as partições de 5 em partes ímpares são $\{1, 1, 1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 3\}$, $\{5\}$. As partições em partes distintas são $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{5\}$ (a quantidade de ambas é 3).

1.2 Identidades Combinatórias - Contagem dupla

A ideia de pegar um problema de contagem e vê-lo de outra maneira também pode nos ajudar a provar fórmulas combinatórias (essas fórmulas todas estão intimamente ligadas ao triângulo de Pascal!). Essa técnica em particular é chamada de **contagem dupla**.

$$1.6) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Solução: o lado esquerdo da equação é: (número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots\}$ com 0 elemento) + (número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ com 1 elemento) + ... + (número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ com n elementos). Consideramos todos os possíveis tamanhos dos subconjuntos, logo contamos *todos* os subconjuntos. Logo, o lado esquerdo é o número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ (é importante observar também que contamos cada subconjunto exatamente uma vez; em outras palavras, trata-se de uma *partição* dos subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Isso é claro nesse caso porque nenhum subconjunto pode ter tamanho a e também tamanho b para $a \neq b$).

Mas o número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ é 2^n , que é o lado direito (você sabe dizer por quê?).

$$1.7) \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$1.8) \text{ Identidade do bastão de hockey: } \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{k+r}{k} = \binom{k+r+1}{k+1}$$

$$1.9) \text{ Ache uma fórmula para } \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

2 Recorrências

2.1 Motivação

Uma recorrência é uma sequência numérica definida em função de alguns dos (ou todos) seus termos anteriores. O exemplo mais famoso talvez seja a sequência de Fibonacci, dada por $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

No geral uma recorrência é uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por uma equação $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$ (vários dos termos podem não aparecer; podemos ter, por exemplo, $a_n = f(a_{n-1})$) Além disso, é necessária uma condição inicial (por exemplo, $a_0 = 0$).

Para estudar a aplicação de recorrências a contagens, começamos com um exemplo clássico.

Problema 3: De quantas maneiras podemos preencher um tabuleiro 2×10 com dominós 2×1 ?

Solução: A solução aqui pode se dar testando alguns casos pequenos (nunca esqueça o poder de casos pequenos, não importa quão difícil seja o problema!). Seja a_n a quantidade de maneiras de preencher um tabuleiro $2 \times n$ com dominós 2×1 . É fácil ver que $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$. Quando fazemos o caso $n = 3$, podemos perceber o seguinte: se pusermos um dominó vertical na extrema direita do tabuleiro (estou imaginando o tabuleiro com 2 casas na vertical por n na horizontal), então nos resta a tarefa (que já fizemos) de preencher um tabuleiro 2×2 . Sabemos que isso pode ser feito de $a_2 = 2$ maneiras. Se não pusermos um dominó no vertical, é fácil perceber que precisamos pôr dois na horizontal, senão uma casinha vai ficar sem

preencher. Logo, sobra o tabuleiro 2×1 para preenchermos, o que pode ser feito de $a_1 = 1$ maneira. Logo, $a_3 = a_2 + a_1 = 3$.

Agora, esse processo pode ser generalizado! Com um argumento exatamente igual, podemos ver que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Isso nos permite calcular a_{10} e responder o problema!

É fácil ver que essa fórmula de recorrência ($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$) define unicamente a sequência. De fato, temos a sequência de Fibonacci! Isso de certa forma “responde” o problema para todo n . Mas isso pode não ser satisfatório porque não temos uma fórmula “fechada” (uma fórmula para a_n em função de n).

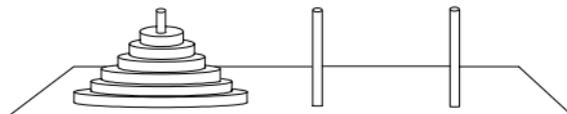
A fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci não é muito fácil de perceber sozinho; ela é:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Mais para a frente, neste artigo, nós iremos aprender a deduzir esse tipo de fórmula sem precisar de inspiração divina. Por ora, fica como exercício provar por indução. Isso é um método importante em recorrências: conjecturar a fórmula e provar por indução!

Exercícios

2.1) Torre de Hanói: considere o jogo da torre de Hanói. Temos n discos de tamanho diferentes, e 3 pinos. Inicialmente os discos se encontram em ordem crescente (o maior embaixo), no primeiro pino. O objetivo é, usando os 3 pinos, mover todos os discos para o terceiro pino, na mesma ordem em que se encontram inicialmente. Qual o número mínimo de movimentos necessários para essa tarefa?



(você pode ler a solução desse problema no artigo *A Torre de Hanoi*, do Carlos Shine, na Eureka. A imagem acima é de lá. O artigo está disponível em [2])

2.2) Considere uma língua que tem um alfabeto com apenas uma letra, mas na qual palavras de qualquer tamanho são permitidas. Uma mensagem nesta língua deve começar e terminar com palavras, mas digita-se um espaço entre palavras. Por exemplo “aa aaa aa” é uma mensagem de 9 caracteres. Quantas mensagens de n caracteres existem nessa língua?

2.3) Para um conjunto S de inteiros, defina $S + 1$ como sendo o conjunto $\{x + 1 : x \in S\}$. Quantos subconjuntos S de $1, 2, \dots, n$ satisfazem $S \cup S + 1 = \{1, 2, \dots, n\}$?

2.4) Encontre o número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ que não contêm dois elementos consecutivos de $\{1, 2, \dots, n\}$

2.5) Prove por indução que se $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, então $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$. Dica: uma maneira de “se livrar” das raízes quadradas é somar e multiplicar os dois números estranhos $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$. O que você sabe sobre equações quadráticas?

2.2 Resolvendo Recorrências Lineares

Vimos acima a fórmula do termo de Fibonacci: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$. Apesar de podermos prová-la por indução, não está claro como chegamos a ela.

Para vermos de onde ela vem, considere uma outra recorrência parecida: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Ela é parecida no sentido de que é linear (um exemplo de não-linear é uma quadrática, como $a_n = a_{n-1}^2$) e de grau 2 (isto é, busca 2 termos anteriores).

Com um pouco de criatividade, podemos escrever $a_n - 2a_{n-1} = 3a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3(a_{n-1} - 2a_{n-2})$. Daí, vemos que se definirmos $b_n = a_n - 2a_{n-1}$, então $b_n = 3b_{n-1}$. Temos uma PG (progressão geométrica), logo $b_n = 3^{n-1}b_1$, e $b_1 = 1$, logo $b_n = 3^{n-1}$

Porém, nosso truque funciona de outra maneira também: $a_n - 3a_{n-1} = 2(a_{n-1} - 3a_{n-2})$. Da mesma forma que antes, $c_n = 2^{n-1}c_1$ onde $c_n = a_n - 3a_{n-1}$, logo $c_n = 2^{n-1}$

Isso nos dá um sistema de equações: $a_n - 2a_{n-1} = 3^{n-1}$ e $a_n - 3a_{n-1} = 2^{n-1}$. Resolvendo para a_n , temos a fórmula para a_n .

Porque nosso truque funcionou? Porque na equação $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $5=2+3$ e $6=2*3$. Ou seja, 2 e 3 tiveram papéis especiais na nossa manipulação porque 2 e 3 são as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ (isso é outra maneira de dizer que $5 = 2 + 3$ e $6 = 2*3$, pelas propriedades de soma e produto).

Daí que vem uma maneira natural de ver a razão áurea (e seu conjugado) na fórmula de Fibonacci. São as raízes de $x^2 - x - 1 = 0$, que surge da equação $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$! O mesmo processo acima funciona trocando 2 e 3 pelas raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, que são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Isso é uma teoria generalizável!

Exercícios:

2.6) Crie a teoria generalizável sobre soluções para $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2}$

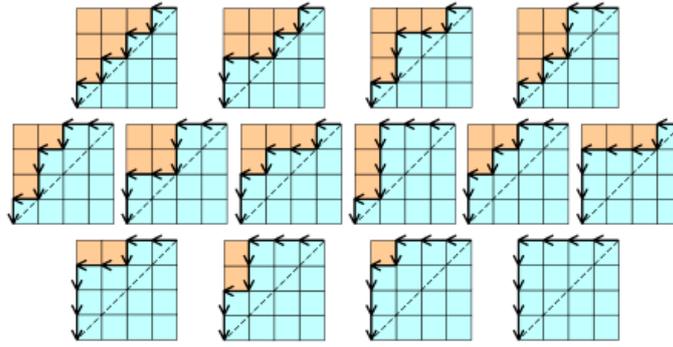
i) na nossa solução, foi importante que 2 e 3 são diferentes, pois usamos o truque duas vezes para conseguir o sistema de equação. O que acontece se a equação tiver raiz dupla? (por exemplo, dizemos que $x^2 - 6x + 9$ tem raiz dupla pois $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$).

ii) Essa teoria é generalizável também para recorrências de grau maior que 2. O que você acha que dá pra dizer, nesses casos? (isto é, equações como $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$?)

2.3 Números de Catalan

Problema 4: Considere um tabuleiro $n \times n$. Uma formiga está no vértice inferior esquerdo do tabuleiro, e, novamente, ela quer chegar ao vértice superior direito fazendo um caminho de tamanho $2n$ (isto é, passos para cima e para baixo sobre as arestas do tabuleiro). Mas, dessa vez ela não quer ultrapassar a diagonal do tabuleiro, ou seja, nunca passa pela metade inferior direita do tabuleiro (ela pode tocar a diagonal, mas não ultrapassá-la). De quantas maneiras ela pode fazer isso?

Exemplo: para $n = 4$, estas são as maneiras de fazê-lo:



Solução: Como podemos transformar isso numa recorrência? Dica: considere a primeira vez que o caminho “toca” a diagonal, sem ultrapassá-la, é claro (pode ser no ponto final, o canto superior direito). Suponha que isso ocorra à altura i . Antes de i a formiga não toca a diagonal. Isso é análogo a não ultrapassar a diagonal “logo acima” da principal, isto é, a diagonal principal deslocada uma unidade para cima. Isso pode ser feito de c_{i-1} maneiras. Para chegar do ponto do toque (altura i) ao ponto final, a formiga pode voltar tocar a diagonal principal - as regras são as mesmas. Isso pode ser feito de c_{n-i} maneiras. Segue que

$$c_n = \sum_{i=1}^n c_{i-1}c_{n-i}$$

Mas como resolver essa recorrência?

Surpresa: vamos resolver o problema com uma bijeção!

Nós iremos ver essa bijeção na aula. Essa solução é bastante famosa e pode ser vista também no artigo da Wikipedia [3].

(Antes de continuar, se você não estava na aula, leia a ”Prova 2” do artigo da Wikipedia! Aliás, a Wikipedia dá mais de uma solução por bijeção. A ”Prova 2” é a mais conhecida, e mais simples que a ”Prova 3”)

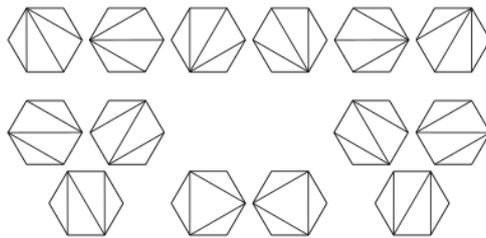
Com a bijeção, *sabemos* que a solução da recorrência é $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Ou seja, provamos que a solução de $c_0 = 1$ e $c_n = \sum_{i=1}^n c_{i-1}c_{n-i}$ é $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$!

Podem parecer que a recorrência aqui foi inútil. Na verdade, existe uma maneira puramente algébrica de resolver a recorrência dada, sem a bijeção. Assim, poderíamos concluir o problema algebricamente depois de chegar à recorrência. Esse método usa funções geratrizes, que veremos na próxima seção. Mas a solução de Catalan com funções geratrizes é um pouco avançada para essa aula, por isso eu não a incluí aqui. Ela pode ser encontrada também no artigo da Wikipedia [3], ou também no capítulo de Recorrências de [1].

Mas, agora, quando virmos a recorrência de Catalan, já sabemos a solução do problema!

Agora, vamos resolver os seguintes problemas! Eles podem ser resolvidos com recorrências ou com bijeções. Tente conectar com a sequência de Catalan. Você pode construir uma recorrência como a acima, ou fazer uma bijeção com o problema da formiga acima.

2.7) Uma triangulação de um polígono é uma divisão dele em triângulos que não se cortam. Por exemplo, a imagem abaixo mostra todas as triangulações de um hexágono.

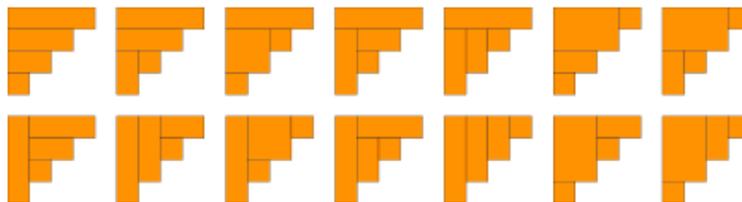


De quantas maneiras podemos triangular um polígono regular de n lados?

Dica: fixe uma aresta do polígono, e considere o triângulo da triangulação que usa essa aresta. Agora, crie uma recorrência! :)

2.8) Uma sequência de n parênteses “à esquerda” - o símbolo “(” - e n à direita é dita *correta* se ela “fecha”, isto é, faz sentido na língua portuguesa. Por exemplo, “((()())” é correta mas “()()” não é. Quantas sequências corretas de $2n$ parênteses existem?

2.9) A figura abaixo ilustra uma “escada” de tamanho 4, e mostra todas as maneiras de construir essa escada usando 4 retângulo empilhados. De quantas maneiras podemos fazer isso para n em geral?



2.10) Considere um polígono regular de $2n$ lados. De quantas maneiras podemos “parear” seus vértices do modo a criar n linhas ligando esses pares, de modo que essas linhas não se intersectem?

Esses exemplos todos (incluindo as imagens) foram tirados do artigo da Wikipedia (em inglês) sobre os números de Catalan. Lá tem muito mais exemplos super interessantes! Consulte! [3]

2.4 Um problema - P4 IMO 2011

Problema 5: (IMO 2011) Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela. Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

Solução: Fazendo casos pequenos, vemos a importância do peso maior. Como a soma de todos os outros é menor que ele (por quê?), no momento em que ele é posto, a partir dali os demais pesos podem ser postos em qualquer ordem e em qualquer das bandejas. Isso já nos dá uma orientação sobre como contar, porque essa última ação pode ser feita de $(n-1-j)! \times 2^{n-1-j}$ maneiras, onde j é o número de pesos postos antes do maior deles (podemos pô-los em $(n-1-j)!$ ordens, e em cada passo podemos escolher pô-los à esquerda ou à direita).

De quantas maneiras podemos pôr os pesos antes do grande? Podemos escolher quais serão esses pesos de $\binom{n-1}{j}$ maneiras. E quanto à ordem?

Digamos que os pesos colocados antes do peso maior são $2^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, 2^{b_j}$, onde $b_i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \forall i$. Suponha sem perda de generalidade que $b_1 < b_2 < \dots < b_j$.

Como já vimos, o peso maior é mais pesado que a soma de todos os outros, e isso vale aqui também (por quê?). Então, no momento em que colocamos 2^{b_j} , não importa muito o fato de ele ser precisamente 2^{b_j} - para efeitos do problema, só importa que ele é maior que a soma de todos os outros. Assim, o número maneiras de colocar os pesos $2^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, 2^{b_j}$ é igual ao número de maneiras de colocar $2^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, 2^{b_{j-1}+1}$.

Iterando essa lógica, vemos que o número de maneiras de colocar $2^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, 2^{b_j}$ na balança é igual ao número de maneiras de colocar $2^0, 2^1, \dots, 2^{j-1}$ na balança (há uma bijeção entre as duas sequências! :D). Isso indica que podemos usar uma recorrência! Seja a_j o número de maneiras de colocar $2^0, 2^1, \dots, 2^{j-1}$ na balança.

Queríamos saber de quantas maneiras podemos distribuir os pesos na balança quando o maior dos pesos é colocado no passo j . Já vimos que isso seria $(n-1-j)! \times 2^{n-1-j}$ vezes o número de maneiras de colocar os pesos $2^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, 2^{b_j}$. Acabamos de descobrir que esse número é a_j !

Assim, chegamos à recorrência:

$$a_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a_j (n-1-j)! \times 2^{n-1-j}$$

Nesse momento, não fique desanimado com a complexidade da equação! A essa altura do problema, você já fez um avanço significativo, já utilizou toda a informação combinatória do problema! Com um pouco de resiliência, se você conseguir trabalhar com essa equação, você acaba o problema!

Essa equação não se encaixa no grupo que temos uma teoria completa (que seriam as lineares). Vamos ver mais maneiras de resolver equações de recorrência complicadas na próxima seção. Mas aqui podemos tentar a boa e velha estratégia dos casos pequenos! Se conseguirmos chegar a uma conjectura para a fórmula, deve ser fácil prová-la por indução.

Fazendo casos pequenos, chegamos aos números 1,3,15,105. Você pode reparar que $15 = 3 \times 5$ e $105 = 15 \times 7$. A cada passo, parece que estamos multiplicando pelo próximo ímpar! Conjectura: a_n é o n -ésimo imparial!

O imparial é o produtório dos primeiros n ímpares: $I(n) = 1.3.5.7 \dots (2n-1)$. Não é difícil ver que uma maneira de escrever o imparial é $I(n) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$.

O resto do problema, como previsto, é um exercício em indução, que fica pra você! :)

3 Funções Geratrizes

Uma função geratriz é um objeto da forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Isso deve gerar várias perguntas: primeiro, se essa definição faz sentido, dado que por exemplo se $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots$ e $x > 1$, a soma não converge, e portanto a soma não faz sentido; segundo, o que isso tem a ver com combinatória?

Responderemos a primeira pergunta eventualmente. Mas acho que antes vale a pena responder a segunda, que é a motivação para responder a primeira. Então, vamos resolver alguns problemas de combinatória sem nos preocupar muito com as tecnicidades, e depois pensamos sobre elas. Por ora, pense em $f(x)$ da mesma maneira que você pensa em polinômios: não precisamos ter números associados a eles, podemos pensar apenas em $f(x)$ como um objeto; uma sequência de coeficientes.

A primeira aplicação é resolver recorrências sem ter que tirar fórmulas da caixinha!

Vamos voltar à recorrência que vimos antes: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 0, a_1 = 1$. Considere a função geratriz desta sequência: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

Aqui entra o poder das funções geratrizes: quando multiplicamos $f(x)$ por x, x^2 , etc. nós “deslocamos” os coeficientes da função:

$$f(x)x = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$$

Isso nos permite usar a fórmula de recorrência da seguinte maneira:

$$5f(x)x = 5a_0x + 5a_1x^2 + 5a_2x^3 + \dots$$

$$6f(x)x^2 = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 5a_2x^4 + \dots$$

Subtraindo uma equação da outra, temos:

$$f(x)(5x - 6x^2) = 5a_0x + (5a_1 - 6a_0)x^2 + (5a_2 - 6a_1)x^3 + \dots$$

$$= a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Logo, $f(x)(5x - 6x^2) = f(x) - x$. Podemos resolver essa equação e obter $f(x) = \frac{x}{1-5x+6x^2}$.

Mas calma? Podemos dividir por funções geratrizes? O que significa isso?

Novamente, peço para continuar esperando para o momento em que vamos lidar com as formalidades. Por ora, vamos ver o poder dessa divisão. Temos que:

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots) = 1$$

Isso pode ser visto apenas expandindo os dois lados e vendo que os termos se cancelam. Logo,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Essa equação é fundamental em funções geratrizes!

Voltando à nossa equação, temos $f(x) = \frac{x}{1-5x+6x^2}$. Mas $1-5x+6x^2$ fatora: $1-5x+6x^2 = (1-2x)(1-3x)$. Logo $f(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-3x)}$

Agora, da mesma maneira que deduzimos a fórmula fundamental acima, temos que $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$. Se conseguirmos separar $\frac{x}{1-5x+6x^2}$ em duas frações, uma com denominador $(1-2x)$ e outra com denominador $(1-3x)$, conseguimos utilizar essas expansões para calcular $f(x)$.

Sabemos que quando somamos duas frações com denominadores polinomiais, multiplicamos os denominadores, assim: $\frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x} = \frac{A(1-3x)+B(1-2x)}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{(-3A-2B)x+(A+B)}{(1-2x)(1-3x)}$. Como queremos separar o denominador de $\frac{x}{(1-2x)(1-3x)}$, podemos fazer o processo inverso! Basta achar A e B tais que $(-3A-2B)x+(A+B) = x$ (o x da direita é o numerador de $\frac{x}{(1-2x)(1-3x)}$). Para isso, basta resolver o sistema $-3A - 2B = 1$ e $A + B = 0$, que nos dá $A = -1, B = 1$ (essa técnica se chama “frações parciais”).

$$\text{Logo, } f(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

Agora sim usamos as expansões da forma $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ (usando $2x$ e $3x$ em vez de x).

$$f(x) = -(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots) + (1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Logo, $a_n = 3^n - 2^n$!

Perceba o quão fácil é provar por indução essa fórmula, mas não é tão fácil percebê-la!

Assim como ocorreu quando estudamos recorrências lineares antes, exatamente o mesmo método funciona para Fibonacci!

Exercícios:

3.1) Resolva a sequência de Fibonacci usando funções geratrizes

3.2) Resolva as seguintes recorrências:

i) $a_n = 2a_{n-1} + 1, a_0 = 0$

ii) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n, a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = -2$ (assim como na seção anterior, essa aplicação de funções geratrizes permite criar uma teoria geral sobre recorrências lineares)

iii) $a_{n+1} = 2a_n + n, a_0 = 1$. Aqui você vai precisar expandir $\frac{1}{1-x}^2$ como função geratriz

iv) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n$

3.1 Quando os expoentes contam!

Lembra do problema de partições que resolvemos com bijeção lá em cima? Relembrando:

Problema 6: Prove que o número de partições de n em partes ímpares é igual ao número de partições de n em partes distintas.

Nota: Uma partição de n é uma sequência não-ordenada cuja soma é n . Por exemplo, as partições de 5 em partes ímpares são $\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 3\}, \{5\}$. As partições em partes distintas são $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}$ (a quantidade de ambas é 3).

Solução: Agora vamos resolvê-lo com funções geratrizes!

Considere $D(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots$ onde d_j é o número de partições de j em partes diferentes.

Afirmamos que $D(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$

Por quê?

Vamos chamar $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$ de $F(x)$ por enquanto. Já vimos lá em cima que $d_5 = 3$ e as partições de 5 em partes diferentes são $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}$. Como obtemos o coeficiente de x^5 em $F(x)$? Faça as contas: basta expandir até o termo $(1+x^5)$, pois os termos depois disso têm expoente maior que 5. Veremos que o coeficiente é 3, pois x^5 aparece como x^{1+4}, x^{2+3} e x^5 .

Quando expandimos $F(x)$, passamos por cada fator $(1+x^r)$ e decidimos se vamos incluir r na soma do expoente ou não, e fazemos isso uma vez para cada r diferente. Logo, o coeficiente de x^n é exatamente a

quantidade de conjuntos $\{r_1, r_2, \dots, r_t\}$, para qualquer t , tal que os r_i 's são distintos e sua soma é n , como queríamos. Logo $D(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$

Agora, vamos pensar na função geratriz das partições em ímpares: $I(x) = i_0 + i_1x + i_2x^2 + \dots$ onde i_j é o número de partições de j em partes ímpares.

Tente escrever $I(x)$ de forma fatorada, como fizemos com $D(x)$.

Conseguiu? Não é muito fácil na primeira vez que você aprende funções geratrizes, mas com a prática você se acostuma!

Considere $G(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)\dots$. Percebeu o padrão? Cada fator é da forma $1+x^r+x^{2r}+x^{3r}+\dots$, para r ímpar.

O primeiro fator representa a quantidade de vezes que o 1 aparece na partição; o segundo fator representa a quantidade de vezes que o 3 aparece na partição, etc.

Quando computamos $[x^5]$, por exemplo (a notação $[x^t]$ indica o coeficiente de x^t), temos novamente que $[x^5] = 3$. Dessa vez, o $3x^5$ vem de: $x^{5 \cdot 1}, x^{2 \cdot 1+3}$ e $x^{1 \cdot 5}$, que correspondem, respectivamente, às partições $\{1, 1, 1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 3\}$ e $\{5\}$.

Da mesma forma que argumentamos acima, vemos que $I(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)!$

Agora, a mágica: para resolver o problema, basta provar que $D(x) = I(x)$, ou seja, que $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)$. A parte "combinatória" do problema acabou - agora usaremos apenas manipulações algébricas!

Já vimos que a identidade mais básica em funções geratrizes é $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$. Logo o lado direito ($I(x)$) é igual a $\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \dots$

Logo, queremos provar que $\prod_{r \in \mathbb{N}} (1+x^r) = \prod_{s \text{ ímpar}} \frac{1}{1-x^s}$.

Passando o denominador para a esquerda, podemos usar a identidade $(1+y)(1-y) = 1-y^2$. Queremos:

$$\prod_{s \text{ ímpar}} (1-x^{2s}) \prod_{r \in \mathbb{N}} (1+x^{2r}) = 1$$

Agora, podemos iterar a operação que reescreve $(1+y)(1-y)$ como $1-y^2$. Observando que os números da forma $2s$ para s ímpar são exatamente os números pares que não são múltiplos de 4, temos que a expressão acima (vamos chamá-la de $E(x)$) é

$$\prod_{s \text{ ímpar}} (1-x^{4s}) \prod_{r \in \mathbb{N}} (1+x^{4r})$$

Com este argumento iterativo (pode-se fazer indução para formalizar), temos que

$$E(x) = \prod_{s \text{ ímpar}} (1-x^{2^k s}) \prod_{r \in \mathbb{N}} (1+x^{2^k r})$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Queremos provar que $E(x) = 1$. Mas, da expressão acima podemos ver que qualquer coeficiente não-nulo de $E(x)$, exceto o $[x^0]$ (o coeficiente independente) tem expoente no mínimo 2^k , para todo k . Mas nenhum natural pode ser maior que todas as potências de dois! Segue que todo coeficiente de $E(x)$ diferente de $[x^0]$ é nulo! Logo, $E(x) = 1$.

Essa parte do argumento é, talvez, um pouco complicada formalmente. Outra maneira de desenvolvê-la é: da expressão acima, que pode ser provada formalmente com indução (e considerando todos nossos objetos como funções geratrizes, para evitar discussões sobre “convergência” e coisas do tipo) temos que, para todo k , $E(x)$ é da forma $1 + x^{2^k} Q_k(x)$ para alguma função geratriz Q_k .

Suponha que existe algum coeficiente $[x^r]$ não-nulo, para $r > 0$, isto é, $E(x) = 1 + cx^r + H(x)$. Seja s o menor índice tal que $[x^s]$ é não-nulo e $s > 0$. Considere k tal que $2^k > s$, que sempre existe. Então $1 + cx^s + P(x) = 1 + x^{2^k} Q_k(x)$, logo $cx^s = x^{2^k} Q_k(x) - P(x)$. Mas $P(x)$ tem grau maior que s pela escolha de s , logo o lado direito da equação tem todos os termos com expoente maior que s . Absurdo, pois o lado esquerdo tem um único termo, cujo expoente é s ! Logo não existe tal s .

Os seguintes problemas usam a mesma ideia!

Exercícios

3.3) Prove que é possível escrever um número em qualquer base de forma única.

Nota: caso você não esteja familiarizado com esse conceito: nós trabalhamos normalmente com o sistema decimal. Isso significa que quando escrevemos 132 estamos nos referindo ao número $1 * 10^2 + 3 * 10^1 + 2$. Porém, isso pode ser feito substituindo 10 por qualquer número. Por exemplo, em base 2 (chamado sistema binário), o número 1101 representa $1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1$, que conhecemos como 13 em base decimal (escreve-se $(1101)_2 = (13)_{10}$). Em base 16, precisamos introduzir 6 novos dígitos: a, b, c, d, e, f . Então, por exemplo, $(b5c)_{16} = 11 * 16^2 + 5 * 16^1 + 12 = (2908)_{10}$.

3.4) Seja n um inteiro positivo. Mostre que se temos uma balança de dois pratos e pesos nos valores $1, 3, 3^2, 3^3, \dots$, então com esses pesos podemos medir qualquer valor inteiro de maneira única.

3.5) (problema repetido da parte de bijeções - agora resolva com funções geratrizes!) Prove que o número de partições de n em k partes é igual ao número de partições de n cuja maior parte é k .

4 Mas podemos fazer isso?

Agora, voltamos à pergunta: por que podemos fazer isso tudo? O que significa $1 + x + x^2 + \dots$ se $x > 1$, quando a soma não converge?

A resposta é que não precisamos utilizar valores “reais”, como $x = 1$. Queremos usar as propriedades interessantes dessas expressões (que em grande parte se resumem ao fato de que $x^{m+n} = x^m x^n$).

Então, *definimos* o objeto $f = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. A partir daqui, definimos soma, multiplicação, da maneira que nos interessa, e verificamos, usando essas definições, que as propriedades que nos interessam se verificam (e.g., $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$).

Para $g = [b_0, b_1, b_2, \dots]$, definimos a soma $f + g = [a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots]$

Definimos também a multiplicação: $f.g = [a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \dots]$, “imitando” a multiplicação de polinômios.

Isso é uma ideia importante: estamos “roubando” as ideias da multiplicação e definindo objetos de modo que não temos que nos preocupar com questões como convergência. Escrever $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots$ pode ser visto apenas como uma “visualização” dos objetos f e g , e a utilização das propriedades de soma e multiplicação definidas para eles!

Como explicamos $\frac{1}{1-x}$? Bom $\frac{1}{d}$ em geral (em qualquer universo) é o inverso multiplicativo de d . Aqui não é diferente. Pela definição de multiplicação acima, vemos que $(1-x)(1+x+x^2+\dots) = 1$. Segue que $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\dots$. $\frac{1}{1-x}$ é só uma notação diferente para $(1-x)^{-1}$.

É importante aqui observar que não podemos supor que qualquer objeto $f(x) = a_0 + a_1x + \dots$ tem um inverso multiplicativo, pois não provamos que todo elemento tem inverso. Assim, só podemos escrever $\frac{1}{f(x)}$ quando já provamos que existe g tal que $fg = 1$. De fato, muitos elementos não têm inverso! Por exemplo, não existe uma função geratriz g tal que $g(x)x = 1$, isto é, $f(x) = x$ não tem inverso! (qualquer elemento da forma $a_1x + a_2x^2 + \dots$, isto é, com $a_0 = 0$ não tem inverso! Será que estes são todos os elementos que não têm inverso?)

Para saber mais sobre esse assunto, e também ver mais maneiras inesperadas de usar funções geratrizes, consulte [4].

Exercício:

3.5) Pense sobre quais funções geratrizes têm inverso! Pense sobre quais suposições você está usando na sua resposta.

5 Provando identidades

Por último, voltamos às identidades binomiais que provamos na primeira seção. Agora vamos prová-las de maneira puramente algébrica!

$$3.6) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Você conhece o Binômio de Newton? $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$. Essa fórmula pode ser provada “combinatorialmente”, pensando em como cada um dos termos $x^t y^{n-t}$ surge. Ela também pode ser provada por indução.

Substituindo $x = y = 1$, temos a fórmula desejada!

$$3.7) \text{ Ache uma fórmula para } \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

Você conseguiu resolver esse problema com bijeção? Para resolvê-lo com funções geratrizes, fica uma dica: considere $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, e lembre que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Onde aparece a soma de quadrados acima?

$$3.8) \text{ Prove que, para } k < m, n, \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

6 Bibliografia:

[1] Paul Zeitz, *The Art of Problem Solving*, Second Edition. Capítulos: Generating Functions (4.3), Partitions and Bijections (6.2), Recurrence (6.4)

[2] Carlos Yuzo Shine, *A Torre de Hanói*. Publicado na Eureka! Disponível em http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/hanoi.pdf

[3] Catalan Number, Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number

[4] Milan Novakovic, *Generating Functions*. Disponível em

http://web.cs.elte.hu/~csiki/generating_functions_Novakovic.pdf (este artigo é mais avançado)