SEMANA OLÍMPICA 2019

SISTEMA DECIMAL – NÍVEL 1

PROF.: ISRAEL DOURADO

01. ***(ITA/2018)*** Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

02. ***(IME/2018)*** Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos ?

03. ***(IME/2017)*** A soma dos algarismos de X com a soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X. Sabe-se que X é um número natural positivo. O menor X possível está no intervalo:

a) $(0,25]$

b) $(25,50]$

c) $(50,75]$

d) $(75,100]$

e) $(100,125]$

04. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/1998)*** Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras distintas e somou todos esses números de 4 cifras. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.

05. ***(ESTÔNIA/2000)*** Em um inteiro positivo M, de três algarismos, o algarismo das centenas é menor do que o algarismo das dezenas e o algarismo das dezenas é menor que o algarismo das unidades. A média aritmética de M com todos os números de três algarismos obtidos pela reordenação dos algarismos de M termina em 5. Determine tais números M.

06. ***(OBM-N1/1997)*** O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. Qual o algarismo das centenas de N ?

07. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2012)*** Um número de quatro algarismos é gago se tem os dois primeiros algarismos iguais entre si e os dois últimos algarismos iguais entre si. Por exemplo, 3311 e 2222 são números gagos. Encontre todos os números gagos de quatro algarismos que são quadrados perfeitos.

08. ***(CEARENSE/2016)*** João escolheu três algarismos distintos e, com eles, formou todos os seis números possíveis de três algarismos distintos. Em seguida, ele somou esses seis números, obtendo como resultado um múltiplo de 108. Pergunta-se: quais os possíveis valores dos algarismos escolhidos por João ? Justifique sua resposta.

09. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2011)*** Dizemos que um número de quatro algarismos $abcd(a \neq 0)$ é porá se valem as seguintes condições: $a \geq b$ e $ab - cd = cd - ba$. Por exemplo, 2011 é porá porque $20 - 11 = 11 - 02$. Encontre todos os números porá.

10. ***(ARGENTINA/1989)*** Ache a raiz quadrada de (1111111111 – 22222).

11. ***(IME/2003)*** Demonstre que o número $\underbrace{111...1}_{(n-1) vezes}\underbrace{222...2}_{(n) vezes}5$ é um quadrado perfeito.

12. ***(MALÁSIA/2010)*** Seja $\gamma = \alpha.\beta$, onde $\alpha = \underbrace{999...99}_{2010}$ e $\beta = \underbrace{444...44}_{2010}$. Determine a soma dos dígitos de γ.

13. ***(GOIÁS/1997)*** Determine a soma dos algarismos do número $(\underbrace{9999...99}_{99}5)^2$.

14. ***(OBM/1995)*** Quanto vale a soma dos algarismos da soma dos algarismos de $(4000...001)^2$?

15. ***(IME/2014)*** Calcule o valor da expressão abaixo:

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370...037}_{89 algarismos} - \underbrace{111...1}_{30 algs "1"}\underbrace{000...0}_{30 algs "0"}}.$$

16. ***(OLIMPÍADA BALCÂNICA/2003)*** Seja $n \in \mathbb{N}$. Um número A consiste de $(2n)$ dígitos todos iguais a 4 ; e um número B consiste de (n) dígitos todos iguais a 8. Prove que o número $(A + 2B + 4)$ é um quadrado perfeito.

17. O produto de 3 números pares consecutivos é igual a $\overline{88abcde}$, onde a,b,c,d,e representam dígitos. Determine a,b,c,d,e.

18. ***(OBM/1998)*** Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4 , 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

19. ***(OBM/2000)*** Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado ?

20. ***(ÍNDIA/1998)*** Existe algum inteiro positivo N tal que o número formado pelos últimos dois dígitos da soma 1 + 2 + 3 + ... + N é 98 ?

21. ***(VENEZUELA/2006)*** Um inteiro possui 223 dígitos e o produto destes dísgitos é 3446. Qual a soma dos dígitos ?

22. ***(OBM/2000)*** Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos ?

23. ***(OBM/2001)*** São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como 11, 121, 411, etc). Determine a soma de todos estes números.

24. Encontre todos os números inteiros positivos que ficam multiplicados por 9 se alguém inserir um zero entre os algarismos das dezenas e das unidades.

25. ***(ARGENTINA/1997)*** Determine todos os números de quatro algarismos $\overline{abcd}$ tais que $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$ e $b-c=d$.

26. Prove que o número $\overline{a_1a_2a_3...a_na_n...a_3a_2a_1}$ é composto, $\forall n \geq 2$.

27. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2016)*** Dizemos que um número de quatro algarismos $\overline{abcd}$, que começa em a e termina em d é intercambiável, se existe um inteiro $n > 1$ tal que $n.\overline{abcd}$ é um número de quatro algarismos que começa em d e termina em a. Por exemplo, 1009 é intercambiável já que $9.1009 = 9081$. Encontre o maior número intercambiável.

28. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2015)*** Dizemos que um número inteiro positivo é supersticioso quando ele é igual a 13 vezes a soma de seus algarismos. Encontre todos os números supersticiosos.

29. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2017)*** Dizemos que um número inteiro positivo é ascendente se seus dígitos lidos da esquerda para a direita estão em ordem estritamente crescentes. Por exemplo, 458 é ascendente e 2339 não é. Determine o maior número ascendente que é múltiplo de 56.

30. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2017)*** Consideramos todos os números de 7 dígitos que se obtém permutando de todas as maneiras possíveis os dígitos de 1234567. Quantos deles são divisíveis por 7 ?

31. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2003)*** São escolhidos quatro dígitos a, b, c, d diferentes entre si e diferentes de zero e se escreve a lista de todos os números de quatro algarismos que se obtém trocando de lugar os dígitos a, b, c, d . Que dígitos deve-se escolher para que a lista tenha a maior quantidade possível de números de quatro algarismos que sejam múltiplos de 36 ?

32. ***(OLIMPÍADA DE MAIO/2007)*** Determinar o maior número natural que tem todos os seus dígitos distintos e é múltiplo de 5, de 8 e de 11.

33. ***(OBM/1998)*** Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

34. ***(TESTE CONE SUL/2018)*** (a) Sejam m e n inteiros positivos e p um número racional positivo, com $m > n$, tal que $\sqrt{m}-\sqrt{n}=p$. Prove que m e n são quadrados perfeitos.

(b) Determine todos os números de quatro algarismos $\overline{abcd}$, em que cada letra a,b,c,d representa um algarismo, tais que $\sqrt{\overline{abcd}} - \sqrt{\overline{acd}} = \overline{bb}$.

35. ***(CEARENSE/2017)*** Os algarismos $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ são colocados, não necessariamente nesta ordem, ao redor de um círculo. Lendo, no sentido horário, três algarismos consecutivos, forma-se um número de três algarismos. Nove números de três algarismos podem ser formados dessa forma. Encontre os possíveis valores da soma desses nove números. Justifique sua resposta.

36. ***(CEARENSE/2017)*** Mostre que não existe quadrado perfeito de oito algarismos cujos quatro algarismos de mais alta ordem (os quatro primeiros da esquerda para a direita) são todos iguais a 9.

37. ***(CONE SUL/1998)*** Prove que, pelo menos para 30% dos números naturais n entre 1 e 1000000, o primeiro dígito de 2^n é 1.

38. ***(RÚSSIA/1998)*** Um inteiro positivo é escrito no quadro. A operação permitida é apagar seu último dígito e adicionar 5 vezes esse dígito ao número que sobra. Começando com 7^{1998} podemos chegar em 1998^7 ?

39. ***(OBM-N2/2018)*** Uma quádrupla (A,B,C,D) é dita *dobarulho* quando A, B e C são algarismos não nulos e D é um inteiro positivo tais que:

1. $A \le 8$
2. $D > 1$
3. D divide os seis números de três algarismos $\overline{ABC}$, $\overline{BCA}$, $\overline{CAB}$, $\overline{(A+1)CB}$, $\overline{CB(A+1)}$, $\overline{B(A+1)C}$.

Determine todas as quádruplas *dobarulho*.

40. Ache todos os números de três algarismos $\overline{abc}$ tal que o número de 6003 dígitos $\overline{abcabcabc...abc}$ é divisível por 91 ($\overline{abc}$ ocorre 2001 vezes).

<u>GABARITO:</u>

01. 285714 02. D 03. D 04. $\{9,8,7,6\}$

05. $159,168,245,258,267,348,357,456$ 06. 9 07. 7744

08. $\{1,8,9\},\{2,7,9\},\{3,6,9\},\{3,7,8\},\{4,5,9\},\{4,6,8\},\{5,6,7\}$

09. $2011,1111,4022,3122,2222,6033,4133,4233,3333,8044,7144,6244,5344,4444,9155,8255,7355,6455$

$5555,9366,8466,7566,6666,9577,8677,7777,9788,8888,9999$.

10. * 11. $\left(\frac{10^n+5}{3}\right)^2$ 12. 18090

38. Não. Invariante: Restos por 7 (Todos os termos da sequência serão múltiplos de 7).

40. 182, 273, 364, 455, 546, 637, 728, 819, 910