Pontos Notáveis

Semana Olímpica 2019 - Nível 1

Ana Karoline

- **Baricentro:** O Baricentro(**G**) é o ponto de encontro das três medianas de um triângulo;

- **Circuncentro:** O circuncentro(**O**), centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, é o encontro das três mediatrizes do triângulo;

- **Ortocentro:** O ortocentro(**H**) é o encontro das três alturas de um triângulo ABC .

Problemas:

1) Prove que o baricentro divide cada mediana na razão 2:1.

2) Dado O o circuncentro do triângulo acutângulo ABC e D a projeção de A sobre BC, prove que ∠DAB = ∠OAC.

3) Seja H e O o ortocentro e circuncentro do triângulo ABC, respectivamente. Dado que M é o ponto médio do lado BC, prove que $AH = 2OM.$

4) (Reta de Euler) Demonstre que o ortocentro - H , o baricentro - G e o circuncentro - O de um triângulo, não equilátero, são colineares e prove a seguinte relação: $\frac{HG}{GO} = 2$

5) Em um triângulo ABC, seja D a projeção de A sobre BC e H o ortocentro. Dado M, N e H_a pontos médios de BC, CA e AH, respectivamente, prove que $DMNH_A$ forma um quadrilátero cíclico.

6) (Círculo dos 9 Pontos) Demonstre que os pés das alturas de um triângulo, os pontos médios do três lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro estão sobre uma circunferência. Prove que o centro de tal circunferência é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro.

- **Incentro:** O Incentro (I) é o ponto de encontro das três bissetrizes internas de um triângulo.

Problemas (continuação):

7) (Teorema da Bissetriz Interna) Demonstre que a bissetriz interna AL do ângulo ∠A de um triângulo ABC divide internamente o lado oposto BC na razão $\frac{AB}{CA}$, ou seja, $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$ em que L é o ponto de interseção da bissetriz interna com o lado BC.

8) (Teorema da Bissetriz Externa) Demonstre que a bissetriz externa de um ângulo de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

9) (Dica para o próximo problema) Prove que o ângulo formado entre a bissetriz interna e a bissetriz externa de um mesmo ângulo em um triângulo é 90º.

10) (Círculo de Apolonius) Seja k um número real positivo, $k \neq 1$. Mostre que o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que PA / PB = k , é uma circunferência cujo centro pertence à reta AB.

11) Seja ABC um triângulo tal que BC = a, CA = b, AB = c, AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC, e seja I o incentro. Então $\frac{AI}{MI} = \frac{b+c}{a}$.

12) Seja ABC um triângulo e I seu incentro. Seja E o ponto de interseção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Então IE = IB = IC.