Princípio Multiplicativo

Kellem Corrêa Santos

25 de janeiro de 2019

O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é uma ferramenta muito útil em problemas de contagem na Análise Combinatória. Vamos ver em que consiste o Princípio, alguns exemplos e vamos resolver problemas de Olimpíadas usando esse Princípio! Ele consiste basicamente em dividir o evento em etapas independentes e, para cada uma dessas etapas, descobrir o número de maneiras possíveis. Após isso, basta multiplicar os resultados individuais para obter o número de maneiras possíveis do evento.

Exemplo 1: Esmeralda deseja montar um *look* para sair com suas amigas. Ela tem 2 opções de saia e 3 opções de blusa. De quantas maneiras ela pode montar o seu *look*?
Solução:

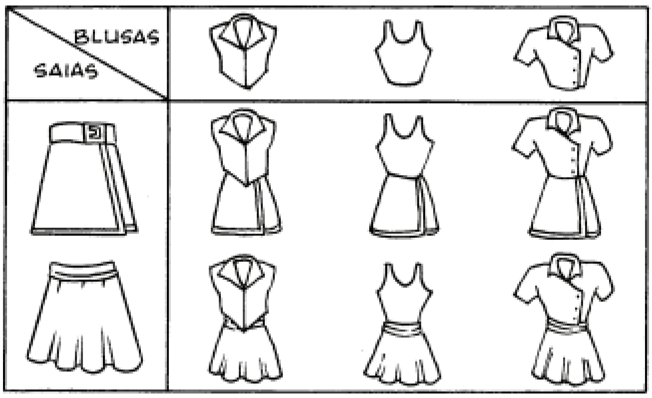


Figura 1: Opções de *look* para Esmeralda

O Princípio Multiplicativo, ilustrado nesse exemplo, também pode ser enunciado da seguinte forma:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de n maneiras e, em seguida, outra decisão d_2 puder ser tomada de m maneiras, o número total de maneiras de tomarmos as decisões d_1 e d_2 será $n.m$.
No caso dos *looks* de Esmeralda, temos as decisões a serem tomadas:
d_1: escolher uma dentre 2 opções de saia
d_2: escolher uma dentre 3 opções de blusa

Assim, Esmeralda tem $2.3 = 6$ maneiras de formar seu *look*.

Exemplo 2: Esmeralda tem uma gaveta com senha, que consiste de três números, em sequência. Porém, ela esqueceu a senha. Ela se lembra de que dois dos números da sequência são 17 e 24, mas não se lembra a ordem dos números. Há 40 possibilidades para o terceiro número. Se ela faz uma tentativa a cada 10 segundos, em quantos minutos, no pior caso, ela abre a gaveta? **Solução:**
Sendo (a, b, c) a senha de Esmeralda e x o número que possui 40 possibilidades de valor (de 31 a 70), as possibilidades de senha podem ser divididas nas possibilidades:

$$(17, 24, x); (17, x, 24); (x, 17, 24); (24, 17, x); (24, x, 17); (x, 24, 17)$$

Então, temos as seguintes decisões:
d_1: escolher uma dentre as 6 configurações possíveis
d_2: escolher x dentre os 40 possíveis valores
Assim, o número de maneiras de formar a senha da gaveta de Esmeralda é $6.40 = 240$. Como ela leva 10 segundos por tentativa, ela levará, no pior caso, 240.10 seg = 2400 seg= 40 min.
Caso os 40 números fossem de 1 a 40, ao invés de 31 a 70, seria o mesmo resultado, certo? **Não!** Deveríamos retirar as contagens duplas:

$$(17, 24, 24); (17, 17, 24); (24, 17, 24); (24, 17, 17); (24, 24, 17); (17, 24, 17)$$

Com isso, temos 6 tentativas a menos, ficando com $(240-6).10 = (2400-60)$ seg = 39 min.

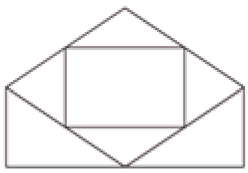
Problema 1 Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Problema 2 No País das Maravilhas existem três cidades: A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?

Problema 3 Suponha que tenhamos uma coleção com 5 livros de Álgebra, 7 livros de Combinatória e 10 livros de Geometria. Se todos os livros são diferentes, de quantas maneiras podemos selecionar dois livros de assuntos diferentes?

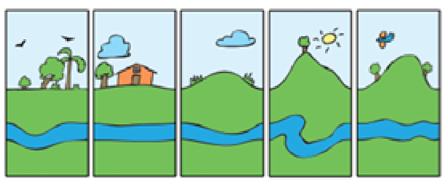
Problema 4 (OBMEP 2006) Dois casais estão sentados em um banco de um parque, posando para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes essas quatro pessoas podem se sentar de modo que cada marido apareça ao lado de sua esposa na fotografia?

Problema 5 (OBMEP 2013) De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura abaixo, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?



Problema 6 (OBM 2014) O número 2014 tem quatro algarismos distintos cuja soma é 7. Quantos números inteiros positivos têm essas duas propriedades?

Problema 7 (OBMEP 2011) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura abaixo. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?



Problema 8 (OBM 2013) João escreveu todos os números de 4 dígitos contendo cada um dos algarismos de 1 até 4 exatamente uma vez. Em quantos desses números a soma dos dois últimos dígitos é maior que a soma dos dois primeiros?

Problema 9 (OBM 2009) De quantas maneiras dois casais podem sentar-se em quatro cadeiras em fila se marido e mulher devem sentar-se em cadeiras vizinhas?

Problema 10 (OBM 1998) De quantos modos se pode colocar na tabela abaixo duas letras A, duas letras B e duas letras C, uma em cada casa, de modo que não haja duas letras iguais na mesma coluna nem na mesma linha?

Problema 11 De quantos modos se pode colocar numa tabela 3x3 duas letras A, duas letras B e duas letras C, uma em cada casa, de modo que não haja duas letras iguais na mesma coluna?

Problema 12 (OBMEP 2014) Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

Problema 13 (OBM 2005) Quantos números entre 10 e 13000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por dígitos consecutivos e em ordem crescente? Exemplificando, 456 é um desses números, mas 7890 não é.

Problema 14 (OMCPLP) Uma formiga decide passear sobre o perímetro de um triângulo ABC. A formiga pode começar em qualquer vértice. Sempre que a formiga está num vertice, ela escolhe um dos vértices adjacentes e caminha diretamente (em linha reta) até o vértice escolhido.De quantos modos a formiga pode passear visitando cada vértice exatamente duas vezes, considerando que o vértice inicial é visitado?