Princípio da Indução Finita

Kellem Corrêa Santos

25 de janeiro de 2019

Suponha determinada propriedade $P(n)$ e que se deseja provar que $P(n)$ vale para todo $n \geq a$, com $a \in \mathbb{N}$. Para isso, usa-se o Princípio da Indução Finita. Para isso, bastam três passos:

- **Base da Indução:** Provar que $P(a)$ é verdadeiro
- **Hipótese de Indução:** Supor válido $P(k)$, para algum $k \geq a$
- **Passo Indutivo:** A partir da Hipótese de Indução, provar que vale $P(k+1)$

Com isso, fazendo $k = a$ na Hipótese de Indução, pelo Passo Indutivo conseguimos provar que $P(a+1)$ também é verdadeiro. Então, usando o mesmo raciocínio, provamos que agora vale para $a+2$ e assim sucessivamente. Quando queremos provar que uma propriedade vale para todo número natural positivo, por exemplo, basta fazer a base com $n = 1$ e o processo da Indução para concluir que vale para todo natural positivo.

Há ainda a versão forte do Princípio de Indução, na qual a Hipótese de Indução compreende supor que a propriedade é válida para todo número $a \leq p \leq k$ e, no passo indutivo, provar que isso implica ser válida para o próximo $(k+1)$.

Exemplo 1: Prove, $\forall n \geq 1$,

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$$

Exemplo 2: Esmeralda vai a um caixa eletrônico que só tem notas de 2 e 5 reais. Prove que ela pode sacar nesse caixa qualquer quantia inteira maior ou igual a 4 reais.

Problema 1 Prove que, para qualquer inteiro $n > 23$, existem inteiros não negativos x e y tais que $n = 7x + 5y$.

Problema 2 Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o número abaixo (contendo exatamente n "1") é irracional. Você consegue descobrir que número é esse quando $n \to \infty$?

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$$

Problema 3 Prove a Fórmula de Cassini por indução: Dados os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, ..., onde $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, então $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$.

Problema 4 (Índia 2001) Prove que, $\forall n \geq 4$, $x! > x^2$.

Problema 5 (Romênia 2013) Prove que é inteiro o número $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$, para todo inteiro $n \geq 0$.

Problema 6 Prove que a média aritmética entre n inteiros não negativos é maior do que ou igual à média geométrica entre os mesmos n números.

Problema 7 (Rússia 2010) Prove que $2!4!6! \cdots (2n)! \geq (n+1)!^n$.

Problema 8 (OBM 1997) Seja a sequência de Fibonacci definida como no Problema 3 e seja $V_n = \sqrt{F_n^2 + F_{n+2}^2}$. Mostre que, para todo n inteiro positivo, V_n, V_{n+1} e V_{n+2} são lados de um triângulo de área $1/2$.

Problema 9 (IMO 1998) Para qualquer inteiro positivo n, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n (incluindo 1 e n). Determine todos os inteiros positivos k tais que $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$, para algum n.

Problema 10 (Rússia 2000) Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^n$.

Prove que $x_n < \frac{n+2}{n+1}$. A partir daí, conclua que a sequência de termo geral $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente.

Problema 11 (USAMO 2011) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = \frac{2f(n)+3}{f(n)+2}$, dado que $f(0) = \frac{1}{4}$, prove que $\forall n \in \mathbb{N}$ temos $0 < f(n) < \sqrt{3}$.

Problema 12 (OBM 2015) Seja ABC um triângulo e n um inteiro positivo. Sobre o lado BC considere os pontos $A_1, A_2, ..., A_{2^n-1}$ que dividem o lado em 2^n partes iguais, ou seja, $BA_1 = A_1A_2 = ... = A_{2^n-2}A_{2^n-1} = A_{2^n-1}C$. Defina os pontos $B_1, B_2, ..., B_{2^n-1}$ e $C_1, C_2, ..., C_{2^n-1}$ sobre os lados CA e AB, respectivamente, de maneira análoga. Trace os segmentos $AA_1, AA_2, ..., AA_{2^n-1}, BB_1, BB_2, ..., BB_{2^n-1}$ e $CC_1, CC_2, ..., CC_{2^n-1}$. Determine, em função de n, em quantas regiões foi dividida a região delimitada pelo triângulo ABC por esses segmentos.

Problema 13 (Putnam 2009) Para n inteiro positivo, mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}.\sqrt{n}$$

Problema 14 (Romênia 2017) Prove que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$$