1 Somas e sequências

1. Calcule $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{m\cdot(m+1)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

2. Calcule $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

3. Calcule $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}$.

4. Prove que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$. (*Identidade de Catalan*)

5. (IMO) Sejam m e n inteiros positivos tais que $\frac{m}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$.
   Prove que m é divisível por 1979.

6. (OBM) Calcule a soma

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}.$$

7. Prove a desigualdade:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$$

8. Para todo inteiro positivo n, seja $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$. Calcule a soma $f(1)+f(2)+\ldots+f(40)$.

9. Seja $a_n=\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$, $n\geq 1$. Determine o valor de

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}.$$

10. Se $\sum_{k=1}^{360}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{m}{n}$, em que m e n são positivos e primos entre si, determine o valor de $m+n$.

11. A sequência $\{x_n\}_n$ é definida da seguinte maneira: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{k+1}=x_k^2+x_k$. Ache o maior inteiro menor que

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}.$$

12. Calcule $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}$.

2 Diferenças Finitas

Seja $P(x)$ um polinômio de grau m. Defina $\Delta^{k+1}P(n) = \Delta^k P(n+1) - \Delta^k P(n)$, $\forall k \geq 1$, com $\Delta^1 P(n) = P(n+1) - P(n)$.

Teorema 1. Seja $P(x)$ um polinômio de grau m, em que $m > 0$. Então $\Delta^m P(n)$ é uma constante diferente de zero.

Demonstração 1. Seja $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio qualquer. Então

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) =$$

$$a_m(n+1)^m + a_{m-1}(n+1)^{m-1} + \ldots + a_1(n+1) + a_0 - (a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0).$$

É fácil ver que o grau de $\Delta P(n)$ é $m-1$ e seu termo de maior grau é $a_m\binom{m}{1}n^{m-1}$, pois $a_m \neq 0$.
Dessa forma, para $k \leq m$, o grau de $\Delta^k P(n)$ é $m-k$. Portanto, quando $k = m$ o grau de $\Delta^m P(n)$ é 0, assim $\Delta^m P(n)$ é uma constante diferente de zero.

Exemplo 1. Determine todos os polinômios $P(x)$ tais que $P(x+1) - P(x) = 2x+1$, $\forall x$.

Solução. Temos que $\Delta P(n) = 2n+1$, assim $\Delta^2 P(n) = \Delta P(n+1) - \Delta P(n) = 2(n+1)+1-(2n+1) = 2$. Como $\Delta^2 P(n)$ é constante e diferente de zero então $P(x)$ tem grau 2, ou seja, $P(x) = ax^2 + bx + c$, assim

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x+1 \Leftrightarrow$$

$$2ax + a + b = 2x + 1, \forall x.$$

Dessa forma, $2a = 2$ e $a + b = 1$. Portanto, $a = 1$ e $b = 0$ e $P(x) = x^2 + c$, para alguma constante c.

1. (AIME) Sejam $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_7$ números reais tais que

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1,$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12,$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123.$$

   Determine o valor de $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$.

2. (AIME) A partir de uma sequência de números reais $A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$, defina ΔA como a sequência de números reais $a_2 - a_1,\ a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, em que o n - ésimo termo é $a_{n+1} - a_n$. Se todos os termos da sequência $\Delta(\Delta A)$ são iguais a 1, e que $a_{19} = a_{92} = 0$, determine a_1.