Grafos

Rafael Kazuhiro Miyazaki - rafaelkmiyazaki@gmail.com

21 de Janeiro de 2019

1 Definições

Definição 1. (Grafo) Um grafo $G = (V, A)$ é constituido por um conjunto V de *vértices* e um conjunto $A \subset V \times V$ de *arestas*. Usualmente representamos o conjunto V como pontos no plano, e A como arestas ligando dois vértices.

Definição 2. (Grafo orientado) Um grafo orientado é um grafo cujas arestas possuem uma orientação. Representamos essa orientação por uma flexa de uma aresta a outra.

Definição 3. (Grau e vizinhança de um vértice) Dado um grafo $G = (V, A)$, e $v \in V$, chamamos $N(v)$ a vizinhaça de v o conjunto de vértices para os quais existe uma aresta entre esse e v. Definimos $deg(v) = |N(v)|$ o grau de v. Em um grafo orientado, comumente denotamos $out(v), in(v)$, o outgrau e ingrau de v, a quantidade de arestas partindo e chegando em v, respectivamente.

Definição 4. (Grafo Conexo) Um grafo $G = (V, A)$ é dito conexo, quando para todo par de vértices $v, w \subset V$ existe um caminho de arestas de v para w.

Definição 5. (Ciclo) Um grafo possui um ciclo quando existe, para algum $k \geq 3$, uma sequência de vértices distintas $v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1} = v_1$ tais que existe uma aresta entre $v_i e v_{i+1}$ para toodo $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Definição 6. (Árvore) Um grafo T é uma árvore se, e somente se, é um grafo conexo e sem ciclos.

Definição 7. (Floresta) Um grafo G é uma floresta se, e somente se, não contém ciclos. Uma floresta é uma união de árvores (tente provar esse fato)

Definição 8. (Grafo Completo) Um grafo é dito completo quando todo par de vértices é conectado por uma aresta diretamente. Denotamos o grafo completo de n vértices é denotado por K_n.

Definição 9. (Grafo Planar) Um grafo é dito planar, se é possível desenhar o mesmo no plano de forma que nenhuma aresta cruza outra aresta.

Definição 10. (Grafo Euleriano) Em um grafo finito G um caminho euleriano é um caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um ciclo euleriano é um ciclo que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Quando um grafo G possui um ciclo euleriano denominamos G um grafo euleriano.

Definição 11. (Grafo Hamiltoniano) Em um grafo finito G um caminho hamiltoniano é um caminho que passa por todos os vértices do grafo exatamente uma vez. Um ciclo hamiltoniano é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo exatamente uma vez. Quando um grafo G possui um ciclo hamiltoniano denominamos G um grafo hamiltoniano.

Definição 12. (Grafo Bipartido) Um grafo G é dito bipartido se, e somente se, é possível particionar o conjunto de vértices V de G em V_1 e V_2 de maneira que não existam arestas ligando vértices de V_1, nem de V_2.

Definição 13. (Torneio) Um torneio T é um grafo finito orientado completo.

2 Teoremas

Teorema 1. *(Soma dos Graus) Em um grafo $G = (V, A)$, vale a sequinte fórmula*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|V|.$$

Em um grafo orientado, vale

$$\sum_{v \in V} out(v) = \sum_{v \in V} in(v) = |V|.$$

Teorema 2. *(Árvores) São equivalentes as seguintes afirmações sobre um grafo T de n vértices:*

1. *T é uma árvore;*
2. *T possui $n - 1$ arestas e é conexo;*
3. *T possui $n - 1$ arestas e é acíclico (uma floresta).*

Teorema 3. *(Folhas em árvores) Toda árvore T com pelo menos 2 vértices possui pelo menos duas folhas (vértices de grau 1).*

Teorema 4. *(Poliedros e Grafos Planares) O grafo G definido por um poliedro convexo P, istoé o conjunto de vértices de G é o conjunto de vértices de P e o conjunto de arestas de G é o conjunto de arestas de P, é um grafo planar.*

Teorema 5. *(Fórmula de Euler) Em um grafo planar vale a seguinte fórmula:*

$$V - A + F = 2,$$

onde $V = |V|$, $A = |A|$ e F é o número de faces de G

Teorema 6. *(Grafos Eulerianos) Um grafo G é euleriano se, e somente se, todos os vértices de G possuem grau par. Um grafo possui caminho euleriano se, e somente se, no máximo 2 de seus vértices possuem grau ímpar.*

Teorema 7. *(Grafos Bipartidos) Um grafo G é bipartido se, e somente se, não possui como subgrafo um ciclo de tamanho ímpar.*

Teorema 8. *(Dirac) Seja G um grafo finito com $n \geq 3$ vértices. Se*

$$deg\ v \geq \frac{n}{2},\ \text{para todo vértice } v \text{ de } G,$$

então G é Hamiltoniano.

Teorema 9. *(Ore) Seja G um grafo finito com $n \geq 3$ vértices. Se*

$$deg\ v + deg\ w \geq n,\ \text{para todo par de vértices } v, w \text{ não adjacentes de } G,$$

então G é Hamiltoniano.

Teorema 10. *(Torneios) Em um torneio T, dizemos que um vértice v é um rei quando*

$$\{v\} \cup N(v) \cup N(N(v)) = V.$$

Para todo torneio T de n vértices valem:

(i) T possui um caminho hamiltoniano;

(ii) T possui um rei;

(iii) T possui pelo menos 3 reis, ou existe um vértice v tal que $out(v) = n - 1$.

3 Problemas

Problema 1. Determine o número mínimo de pessoas em uma festa para que podemos garantir que existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem.

Problema 2. (Treinamento Cone Sul 2010) Um conjunto de 1990 pessoas está dividido em subconjuntos disjuntos satisfazendo as seguintes condições:

1. Ninguém em um subconjunto conhece todos os outros membros do subconjunto.

2. Entre quaisquer três pessoas em um subconjunto, sempre existem pelo menos duas que não se conhecem.

3. Para quaisquer duas pessoas em um subconjunto que não se conhecem, existe exatamente uma pessoa no mesmo subconjunto conhecendo ambas.

Prove que cada subconjunto, todas as pessoas possuem o mesmo número de amigos. Além disso, o número máximo de subconjuntos.

Observação: A relação de amizade em questão é simétrica, i.e., se A conhece B, então B conhece A.

Problema 3. (Treinamento Cone Sul 2010) Existem 1998 cidades e 4000 estradas em um certo país (cada estrada conecta duas cidades). Prove que existe um caminho fechado passando através de não mais que 20 cidades.

Problema 4. (Treinamento Cone Sul 2010) Happy City possui 10 cidades, chamadas $H_1, H_2, ..., H_{10}$, e algumas delas são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que é possvél chegar de H_1 a H_{10}. Mostre que uma das situações abaixo ocorre:

1. Existe um caminho ligando H_1 a H_{10} utilizando no máximo 3 estradas.

2. Existem duas cidades H_i e H_j, $2 \leq i < j \leq 9$, tais que todo caminho ligando H_1 a H_{10} passa por H_i ou H_j.

Problema 5. (Treinamento Cone Sul 2011) Em um grupo de 9 pessoas, não existem 4 que se conhecem mutualmente. Prove que o grupo ode ser particinado em quatro grupos de modo que em cada grupo não existem duas pessoas que se conheçam.

Problema 6. (Treinamento Cone Sul 2011) Existem 1000 cidade em Shinelândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Shinelândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.1

Problema 7. (Treinamento Cone Sul 2013) Existem $n \geq 5$ pessoas em uma festa. Suponha que entre quaisquer três pessoas na festa existem pelo menos duas se conhecem. Mostre que podemos selecionar pelo menos $n/2$ pessoas es arranjá-los em torno de uma mesa circular de modo que cada pessoa fique sentada entre dois de seus amigos.

Problema 8. (Treinamento Cone Sul 2013) Numa reunião de $12k$ pessoas, cada pessoa cumprimenta exatamente $3k + 6$ outras. Para quaisquer duas pessoas o número de pessoas que cumprimentou ambas é o mesmo. Quantas pessoas estavam na reunião? (Não é necessário exibir o exemplo)

Problema 9. (Treinamento Cone Sul 2013) Em um grupo de n pessoas, sabe-se que acontece, com certeza, uma das duas situações abaixo:

1. Há um grupo de três pessoas tal que quaisquer duas se conhecem;

2. há um grupo de cinco pessoas tal que quaisquer duas não se conhecem.

Qual é o menor valor possível de n? (Considere a relação de conhecer recíproca, ou seja, se A conhece B então B conhece A).

Problema 10. (Bulgaria 2018) Em um planeta existem M países e N cidades. Algumas estradas existem ligando 2 cidades de forma que:

(1) Em cada país existem pelo menos 3 cidades;

(2) Para cada país, cada cidade nesse país está conectado a pelo menos metade das cidades desse país;

(3) Cada cidade esta conectada a exatamente uma outra cidade fora de seu país;

(4) Existem no máximo duas estradas entre cidades de dois países distintos;

(5) Se dois países contém combinados menos de $2M$ cidades, então existe uma estrada entre eles.

Prove que existe um ciclo de tamanho maior ou igual a $M + \frac{N}{2}$ formado por cidades desse planeta.

Problema 11. (Benelux 2017) Seja $n \geq 2$ um inteiro. Alice e Bob jogam um jogo sobre um país composto por n ilhas. Exatamente duas dessas n ilhas tem uma fábrica. Inicialmente não existem pontes nesse país. Em cada turno, o jogado deve construir uma ponte ligando duas ilhas distintas I_1 e I_2 tais que:
• I_1 e I_2 ainda não estão conectadas por uma ponte.
• pelo menos uma das ilhas I_1 ou I_2 é conectada por uma série de pontes a uma ilha com uma fábrica (ou existe uma fábrica na mesma).

O jogador que cria o primeiro caminho com ponte entre as fábricas perde o jogo. Se Alice começa o jogo, e eles revezam turnos, determine, para cada valor de n qual jogador possui uma estratégia vencedora.

Problema 12. (Russia) Em um torneio T de 1001 vértices, cada um dos vértices possui ingrau 500. Mostre que qualquer subgrafo de T com 668 vértices é conexo.

Problema 13. (Baltic Way 2016) Em um mar existem 2016 portos. Existem balsas ligando alguns desses portos em ambas as direções. É ímpossível realizar uma viagem por balsas $C_1 - C_2 - ... - C_{1062}$ onde os portos $C_1, ..., C_{1062}$ são distintos dois a dois. Prove que existem dois conjuntos disjuntos A e B de 477 portos cada, tais que nenhum porto de A está diretamente ligado a um porto de B.

Problema 14. (Baltic Way 2015) Em um clube, há 100 senhoras. Cada senhora toma chá(em particular) com exatamente 56 de suas amigas. As 50 senhoras pertencendo ao conselho do clube tomaram chá com todas as outras senhoras do conselho. Prove que o clube pode ser dividido em dois grupos de forma que em cada grupo, cada senhora tomou chá com cada uma das outras senhoras do grupo.

Problema 15. (Nordic 2016) O Rei George decidiu conectar as 1680 ilhas de seu reino com pontes. Infelizmente um movimento rebelde irá destruir duas pontes assim que todas as pontes tenham sido construídas, mas não duas pontes partindo da mesma ilha. Qual é o número mínimo de ponders que George deve construir de maneira que ele garanta que seja possível viajar por ponte entre quaisquer duas das 1680 ilhas após a destruição provocada pelos rebeldes?

Problema 16. (Baltic Way 2012) Um grafo orientado G não possui ciclos orientados, e o número de arestas do maior caminho orientado de G é menor ou igual a 99. Mostre que é possível colorir os vértices de G de 2 cores de forma que o número de arestas do maior caminho orientado monocromático de G seja menor ou igual a 9.

Problema 17. (Russia 2016) Em um país existem $n > 1$ cidades, alguns pares de cidades são conectadas por voos diretos em ambas direções. Para cada par de cidades existe exatamente uma rota aérea.

O prefeito de cada cidade X contou o número de maneiras de numerar as cidades de 1 a n, tal que toda rota aérea começando em X, os números das cidades estão em ordem crescente. Sabemos que o resultado obtido pelo prefeito de $n-1$ prefeitos é um múltiplo de 2016.

Mostre que o resultado obtido pelo último prefeiro é um múltiplo de 2016 também.

Problema 18. (Baltic Way 2010) Em uma cidade existem algumas cidades, uma delas a sua capital. Para cada par de cidades A e B existe um voo direto de A para B e um voo direto de B para A, ambos com o mesmo preço. Suponha que todas as viagens iniciando e terminando na mesma cidade, passando por todas as cidades do país tem o mesmo custo. Prove que todas as viagens iniciando e terminando na mesma cidade, passando por todas as cidades do país, com exceção da capital tem o mesmo custo.