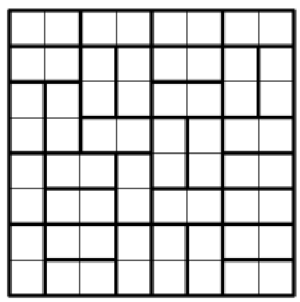
Semana Olímpica 2019
Grafos e Determinantes
Nível U

Samuel Feitosa

1 Coberturas de Tabuleiros e Acoplamentos Perfeitos

Exercício 1. De quantos modos um tabuleiro 8×8 pode ser coberto com dominós 2×1?



Teorema 1 Todo grafo planar bipartido 2-conexo possui um acoplamento perfeito.

Teorema 2 (Schwartz-Zipel) Sejam K um corpo arbitrário e S um subconjunto finito de K. Então para todo polinômio não nulo $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de grau d em m variáveis e com coeficientes em K, o número de m-uplas $(r_1, r_2, \ldots, r_m) \in S^m$ com $p(r_1, r_2, \ldots, r_m) = 0$ é no máximo $d|S|^{m-1}$.

2 Caminhos

Proposição 1 (Gessel-Viennot) Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado, com pesos, acíclico e finito, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ e $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ dois conjuntos de vértices com n elementos e M a matriz-caminho de $\mathcal{A}$ até $\mathcal{B}$. Então

$$detM = \sum_{\mathcal{P}} \text{sign}(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}),$$

($\mathcal{P}$ percorre os sistemas de caminhos de vértices disjuntos).

Teorema 3 (Binet-Cauchy) Sejam P uma matriz $r \times s$ e Q uma matriz $s \times r$, com $r \leq s$. Então $det(PQ) = \sum_{\mathcal{Z}} (detP_{\mathcal{Z}})(det(Q_{\mathcal{Z}})$, onde $P_{\mathcal{Z}}$ é a submatriz $r \times r$ de P, com conjunto de colunas $\mathcal{Z}$, e $Q_{\mathcal{Z}}$ é a submatriz $r \times r$ de Q, com correpondentes linhas $\mathcal{Z}$.

Exercício 2. (IME 2016) Define-se A como a matriz 2016×2016, cujos elementos satisfazem à igualdade

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1},$$

para $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$. Calcule o determinante da matriz A.

Teorema 4 (Cayley) Existem n^{n-2} árvores rotuladas diferentes com n vértices.

Exercício 3 (OBMU, 2005). Prove que para quaisquer naturais $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e $0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, a matriz $A = (a_{rs})_{1 \leq r,s \leq k}$ dada por $a_{rs} = \binom{i_r + j_s}{i_r}$ $(1 \leq r, s \leq k)$ é invertível.

3 Matrizes de Hadamard e Códigos Corretores de Erros

Definition 1 Seja A um alfabeto. Sejam $u, v \in A^n$ palavras de comprimento n. A distância de *Hamming* entre u e v, denotada por $d(u, v)$ é o número de posições em que u e v diferem.

Definition 2 Dizemos que um código C corrige t erros se para todo $u \in A^n$ existe no máximo um $v \in C$ com $d(u, v) \leq t$. A distância mínima de um código C é definida como $d(C) = min\{d(u, v) : u, v \in C, u \neq v\}$. Se C é um código de comprimento n, tamanho M e distância mínima d, então ele será chamado de (n, M, d)-código.

Exercício 4. Um código C corrige t erros se, e somente se, $d(C) \geq 2t + 1$.

Exemplo 1 Considere a matriz P de dimensões $l \times n$, com $n = 2^l - 1$, cujas colunas são todos os vetores não-nulos de F_2^l. Seja C o conjunto dos vetores w tal que $Pw = 0$. Verifique que $d(C) = 3$.

Teorema 5 (Plotkin, 1960) Suponha que $n, d \in \mathbb{N}$ com $2d > n$. Se $A_2(n, d)$ representa o número máximo de possíveis palavras em um código binário com palavras de comprimento n e distância mínima d, então

$$A_2(n, d) \leq \frac{2d}{2d - n}.$$

Definition 3 Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma *matriz de Hadamard* de ordem n é uma matriz H tal que toda entrada de H é ± 1 e $HH^T = nI$.

Exercício 5. Suponha que H é uma matriz de Hadamard de ordem $n \geq 2$. Se $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $i \neq k$, então a linha i e a coluna j de H são iguais em exatamente $n/2$ posições.

Teorema 6 Suponha que H é uma matriz de Hadamard de ordem $n \geq 2$. Seja B uma matriz $2n \times n$ definida por

$$B = \begin{pmatrix} H \\ \\ -H \end{pmatrix}.$$

As linhas de B são as palavras de um $(n, 2n, n/2)$-código sobre o alfabeto $\{+, -\}$.

Os cógidos dados pelo teorema anterior são chamados de códigos de Hadamard.

Exemplo 2 Considere

$$H = \begin{pmatrix} + & + & + & - \\ + & + & - & + \\ + & - & + & + \\ - & + & + & + \end{pmatrix}$$

O código de Hadamard associado a essa matriz é

0001 0010 0100 1000

1110 1101 1011 0111

Teorema 7 (Jacques Hadamard, 1893) Se N é uma matriz possuindo vetores colunas denotados por v_i, então

$$|det(N)| \leq \prod_{i=1}^{n} ||v_i||.$$

Exercício 6 (Putnam, 2005). Seja H uma matriz $n \times n$ em que as entradas são ± 1 e cujas linhas são mutuamente ortogonais. Suponha que H possui uma submatriz $a \times b$ cujas entradas são todas iguais a 1. Mostre que $ab \leq n$.

Teorema 8 (Lindsey) A soma das entradas de qualquer submatriz $a \times b$ de uma matriz de Hadamard é no máximo $\sqrt{abn}$.

Respostas e Soluções.

6.