Vingança Olímpica 2019

- Não escreva mais de uma questão por folha. Escreva seu nome em cada folha que usar.
- Cada problema vale 10 pontos.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Duração: 5 horas.

1. Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno e D um ponto no seu circuncírculo tal que AD é simediana do triângulo ABC. Sejam E a reflexão de D por BC, C' a reflexão de E por AB, e B' a reflexão de E por AC. Prove que as retas AD, BB', CC' concorrem se, e somente se, $\angle BAC = 60^o$.

2. Para todo inteiro positivo x, defina $P(x)$ como sendo o maior divisor primo de x. Prove que existem infinitos n tais que $P(n^2+1) < n \cdot \pi^{-2019}$.

3. Seja Γ um círculo de centro O e raio R. Sejam X e Y pontos sobre Γ tais que $XY < R$. Seja I um ponto tal que $IX = IY$ e $XY = OI$. Descreva como contruir com régua e compasso um triângulo com circuncírculo Γ, incentro I e reta de Euler OX. Prove que esse triângulo é único.

4. Um *icosaedro regular* é um sólido regular de 20 faces, cada uma em forma de triângulo equilátero, com 12 vértices, de modo que de cada vértice incidem 5 arestas.

   Doze doces indistinguíveis estão colados nos vértices de um icosaedro regular (um em cada vértice), e quatro desses doze doces são especiais. André e Lucas querem juntos criar uma estratégia para o seguinte jogo:

   - Primeiro, André é informado sobre quais são os quatro doces especiais e deve remover exatamente quatro doces não especiais do icosaedro e deixar o sólido em uma mesa, indo embora logo em seguida sem se comunicar com Lucas.
   - Depois, Sponchi, que quer evitar que Lucas descubra os doces especiais, pode pegar o icosaedro da mesa e girá-lo como quiser.
   - Após Sponchi fazer sua jogada, ele sai da sala, Lucas entra e deve determinar os quatro doces especiais dentre os oito que restaram no icosaedro.

   Determine se existe estratégia para a qual Lucas sempre consiga descobrir corretamente os quatro doces especiais.

5. Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como:

$$f(n) := \sum \frac{(1 + t_1 + t_2 + t_3 \cdots + t_n)!}{(1 + t_1)!t_2!t_3! \dots t_n!},$$

   onde o somatório percorre todas n-uplas $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, com $t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i = n$.

   Dado p um número primo maior que 3, mostre que:

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq p-1} \frac{f(i)}{i \cdot j \cdot k} \equiv \sum_{1 \leq i < j < k \leq p-1} \frac{2^i}{i \cdot j \cdot k} \pmod{p}.$$