Yuri Lima yurilima@gmail.com

Combinatória geométrica

Problema 1. (Putnam 1979) Dados $2n$ pontos no plano sem três colineares, n deles são pintados de vermelho e n deles são pintados de azul. Prove que é possível parear os pontos usando segmentos ligando cada ponto vermelho a exatamente um ponto azul de modo que esses segmentos não se cortem.

Problema 2. (Moscou 1985 e OMCPLP 2015) Um coelho está no centro de um quadrado e quatro lobos estão nos vértices do quadrado, um lobo em cada vértice. O coelho pode andar por todo o quadrado, mas os lobos só podem andar sobre os lados. Sabendo que a velocidade máxima de cada lobo é 1,4 vezes a velocidade máxima do coelho, é possível que o coelho saia do quadrado sem ser pego pelos lobos?

Problema 3. (Vietnã 1987) Dado um conjunto de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

Problema 4. (Leningrado 1990) É possível cobrir o plano, sem superposição, com quadrados de lados $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ usando cada um desses quadrados não mais que:

(a) dez vezes?

(b) um vez?

Problema 5. São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que:

(i) quaisquer duas retas são concorrentes;

(ii) por todo ponto de interseção entre duas retas passa pelo menos mais uma reta.

Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Problema 6. Em um pátio estão localizadas $2n+1$ pessoas, de modo que as distâncias entre quaisquer duas delas são distintas duas a duas. Em um dado momento, cada uma delas atira com um revólver na pessoa mais próxima de si. Supondo que todos os tiros foram certeiros, prove que:

(a) Pelo menos uma pessoa irá sobreviver.

(b) As trajetórias das balas não se cruzam transversalmente.

(c) Ninguém levará mais de cinco tiros.

Problema 7. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Cada ponto de uma circunferência é colorido com uma dentre n cores. Prove que existe um trapézio inscrito na circunferência com todos os seus vértices pintados da mesma cor.

Problema 8. Dados $2n$ pontos no plano, mostre que existe uma reta que divide o plano em duas regiões com n pontos cada.

Problema 9. (Torneio das Cidades) Seja M um conjunto finito de pontos no plano. Um ponto P do plano é *quase centro de simetria* se existir $A \in M$ tal que P é centro de simetria de $M - \{A\}$. Determine o maior número possível de quase centros de simetria que M pode ter.

Problema 10. (Cone Sul 1996) Ache todos os inteiros $n > 2$ para os quais existe um conjunto S_n de n pontos no plano satisfazendo as seguintes condições:

(i) três pontos quaisquer não são colineares;

(ii) nenhum ponto está no interior de um círculo que tenha por diâmetro dois pontos de S_n.

Problema 11. (Argentina 2000) Consideremos um polígono regular de n lados ($n > 2$). Em cada vértice se escreve um número inteiro entre 1 e n, inclusive, sem repetir os números. Diremos que uma distribuição dos números é *boa* se para cada três vértices A, B, C tais que $AB = AC$, se verifica que o número escrito em A é maior que cada um dos números escritos em B e C, ou o número escrito em A é menor que cada um dos números escritos em B e C. Determine todos os valores de n para os quais existe uma distribuição boa.

Problema 12. (Rússia 2017) Um polígono convexo P é dividido, utilizando algumas diagonais que não se intersectam, em triângulos isósceles. Prove que P possui dois lados de mesmo tamanho.

Problema 13. (Rússia 2017) No plano, uma quantidade finita de retas em posição geral é desenhada. Essas retas dividem o plano em regiões. Mostre que é possível atribuir um número positivo a cada região de modo que, para cada reta desenhada, a soma dos números das regiões de um lado da reta e a soma dos números das regiões do outro lado da reta são iguais.

Problema 14. (Romênia 2018) Seja n um inteiro positivo, e seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de perímetro igual a $6n$. São escolhidos $3n$ pontos em $\mathcal{C}$, que definem $3n$ arcos tais que exatamente n deles têm tamanho 1, n têm de tamanho 2 e n têm tamanho 3. Mostre que existem dois pontos escolhidos que são diametralmente opostos.

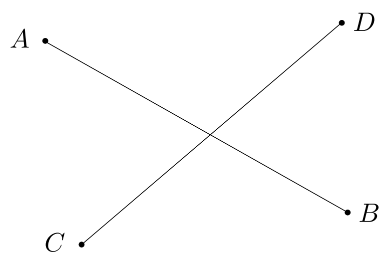
Problema 15. (Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.

Problema 1. (Putnam 1979) Dados $2n$ pontos no plano sem três colineares, n deles são pintados de vermelho e n deles são pintados de azul. Prove que é possível parear os pontos usando segmentos ligando cada ponto vermelho a exatamente um ponto azul de modo que esses segmentos não se cortem.

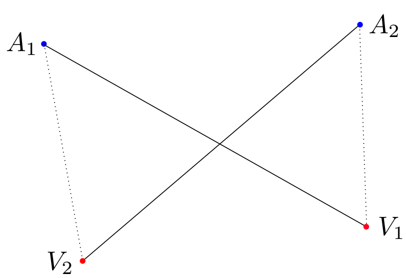
Solução.

Ideia: princípio do extremo + desig. triangular

Se os pontos não forem coloridos de azul e vermelho, escolha, dentre todos os pareamentos por segmentos, aquele que minimiza a soma dos comprimentos dos segmentos. Por absurdo, se dois dos



segmentos AB e CD se intersectam, podemos trocá-los por AC e BD (ou por AD e BC) e concluir, pela desigualdade triangular, que a soma dos comprimentos diminui, absurdo. Assuma agora que os pontos são pintados como no enunciado, e argumente de maneira semelhante: considere todos os pareamentos por segmentos tais que os extremos de cada segmento têm cores distintas, e tome o pareamento que minimiza a soma dos comprimentos. Se,



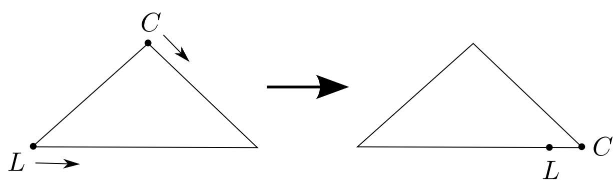
por absurdo, dois segmentos A_1V_1 e A_2V_2 se intersectam, então podemos trocá-los por A_1V_2 e A_2V_1 e obter um pareamento com soma de comprimentos ainda menor.

Problema 2. (Moscou 1985 e OMCPLP 2015) Um coelho está no centro de um quadrado e quatro lobos estão nos vértices do quadrado, um lobo em cada vértice. O coelho pode andar por todo o quadrado, mas os lobos só podem andar sobre os lados. Sabendo que a velocidade máxima de cada lobo é 1,4 vezes a velocidade máxima do coelho, é possível que o coelho saia do quadrado sem ser pego pelos lobos?

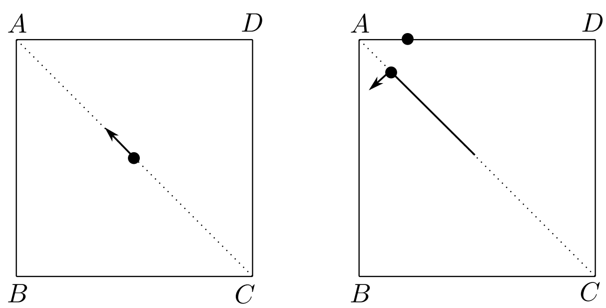
Solução.

Ideia: identificação de mecanismo

Sim, é possível. A observação principal é que $1,4 < \sqrt{2}$, de modo que se o coelho e um lobo estão em uma posição que é o lado de um triângulo retângulo isósceles, com o coelho no vértice oposto à hipotenusa, então o coelho chega no outro vértice do triângulo antes do lobo. Desse modo, o coelho pode



aplicar a seguinte estratégia, dividida em dois passos:



- Passo 1: chamando o quadrado de $ABCD$, o coelho corre em direção a A, pela diagonal AC, até ficar seguro dos lobos que estavam em B, C, D.

∘ Passo 2: ao chegar nesse local com distância segura, ele olha em que lado o lobo inicialmente em A está. Se estiver no lado AD, então o coelho vira 90° em direção ao lado AB e escapa.

Problema 3. (Vietnã 1987) Dado um conjunto de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

Solução.

Ideia: teorema de Sylvester

Se não existe tal reta, então qualquer reta que passa por dois pontos necessariamente passa por um terceiro. Pelo teorema de Sylvester, todos os pontos estão sobre uma mesma reta, absurdo.

Problema 4. (Leningrado 1990) É possível cobrir o plano, sem superposição, com quadrados de lados $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ usando cada um desses quadrados não mais que:

(a) dez vezes?

(b) um vez?

Solução.

Ideia: potências de 2 + geometria

(a) Sim, é possível. Lembre-se da maneira de dividir um quadrado em $4k + 3$ quadrados menores.

(b) Não é possível. Considere um quadrado Q de lado 2^k. Afirmamos o seguinte: cada vértice de Q pertence ao perímetro de um quadrado Q' de lado maior. A prova desse fato é simples: caso contrário, os quadrados adjacentes teriam lados $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$, cuja soma é menor que 2^k. Em posse desse fato, nota-se que cada quadrado maior adjacente tem um vértices em comum com Q (senão existiria espaço entre os quadrados satisfazendo o fato, que teriam que ter lados menores e portanto os seus vértices não satisfariam o fato). Sejam Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 os quadrados adjacentes, e seja Q_1 o de maior lado. Então um dos vértices de Q_1 pertence a Q e algum Q_i apenas, o que contraria o fato, absurdo.

Problema 5. São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que:

(i) quaisquer duas retas são concorrentes;

(ii) por todo ponto de interseção entre duas retas passa pelo menos mais uma reta.

Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Solução.

Ideia: dualidade + teorema de Sylvester

A cada reta ℓ associamos um ponto dual L de modo a preservar a propriedade de incidência:

$$P \in \ell \iff L \in p.$$

As condições do enunciado dizem que os $n \geq 3$ pontos duais satisfazem a hipótese do teorema de Sylvester, e portanto estão todos sobre uma mesma reta ℓ_0. Mas então todas as retas passam por um mesmo ponto (igual ao ponto dual L_0).

Problema 6. Em um pátio estão localizadas $2n + 1$ pessoas, de modo que as distâncias entre quaisquer duas delas são distintas duas a duas. Em um dado momento, cada uma delas atira com um revólver na pessoa mais próxima de si. Supondo que todos os tiros foram certeiros, prove que:

(a) Pelo menos uma pessoa irá sobreviver.

(b) As trajetórias das balas não se cruzam transversalmente.

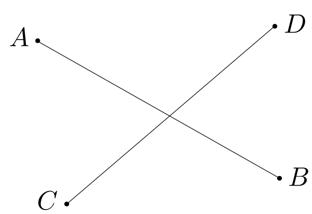
(c) Ninguém levará mais de cinco tiros.

Solução.

Ideia: ciclicidade + desigualdade triangular

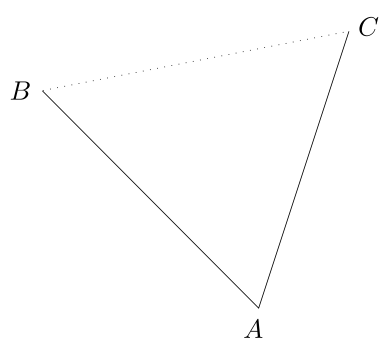
(a) Suponha que todos morrem. Como são $2n+1$ pessoas e $2n+1$ tiros, então cada pessoa leva exatamente um tiro. Podemos gerar um ciclo de tiros: P_1 atira em P_2, P_2 atira em P_3, ..., P_k atira em P_1. Então $P_1P_2 > P_2P_3 > \cdots > P_kP_1 > P_1P_2$, um absurdo.

(b) Se A atira em B e C atira em D, então $AB + CD < AD + BC$. Se AB e CD se cruzassem, como na figura, pela desigualdade triangular



teríamos $AB + CD > AD + BC$, absurdo.

(c) Se A leva tiro de B e C, então $BC > BA$ e $BC > CA$, donde BC é o maior lado do triângulo ABC. Isso implica que $\angle BAC > 60°$. Se A levasse seis tiros, então algum ângulo seria menor que $60°$, absurdo.



Problema 7. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Cada ponto de uma circunferência é colorido com uma dentre n cores. Prove que existe um trapézio inscrito na circunferência com todos os seus vértices pintados da mesma cor.

Solução.

Ideia: identificação de mecanismo + PCP

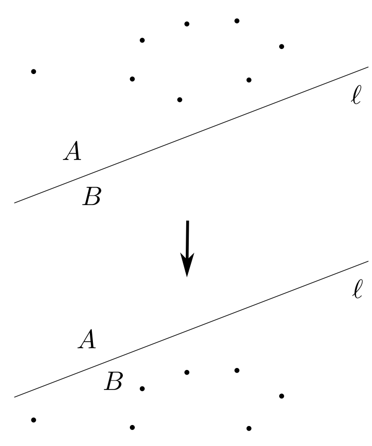
Um quadrilátero inscrito em uma circunferência é um trapézio se e somente se dois arcos opostos definidos pelos vértices têm o mesmo comprimento. Vamos tomar um polígono regular inscrito na circunferência com uma quantidade k suficientemente grande de vértices de modo que existam dois pares de vértices que definem arcos de comprimentos iguais e pintados da mesma cor.

Tome $k = (n+1)(n^2+1)$ e divida o polígono em n^2+1 blocos de vértices consecutivos. Pelo PCP, cada bloco contém dois vértices pintados da mesma cor c. Se esses vértices definem um arco de tamanho l, associe o par (c, l) ao bloco. Cada coordenada desse par pode assumir n valores, visto que c representa uma cor e l representa uma distância entre dois vértices de um bloco. Assim, novamente pelo PCP, existem dois blocos associados ao mesmo par. Isso conclui a prova.

Problema 8. Dados $2n$ pontos no plano, mostre que existe uma reta que divide o plano em duas regiões com n pontos cada.

Solução.

Ideia: continuidade discreta



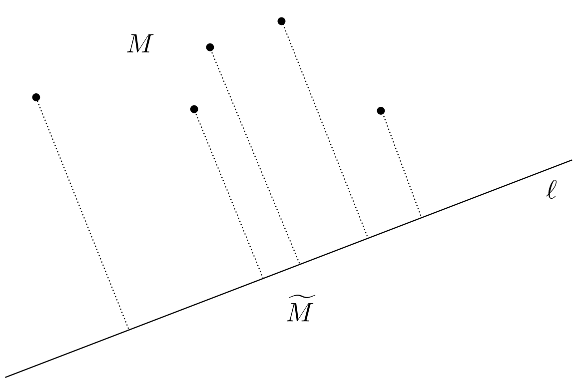
Considere uma inclinação diferente das $\binom{2n}{2}$ inclinações geradas pelos $2n$ pontos. Considere uma reta ℓ com essa inclinação, dividindo o plano em dois semiplanos A, B, de modo que todos os $2n$ pontos estão no semiplano A. Deslize ℓ paralelamente, até que todos os $2n$ pontos ficam no outro semiplano B. Durante esse processo de deslizamento, os pontos vão, um a um, passando do semiplano A para o semiplano B. Existe um momento em que exatamente n pontos estão em A e n pontos em B.

Problema 9. (Torneio das Cidades) Seja M um conjunto finito de pontos no plano. Um ponto P do plano é *quase centro de simetria* se existir $A \in M$ tal que P é centro de simetria de $M - \{A\}$. Determine o maior número possível de quase centros de simetria que M pode ter.

Solução.

Ideia: projeção

Seja $\mathcal{Q}$ o conjunto de quase centros de simetria de M. Afirmamos que o maior valor de $|\mathcal{Q}|$ é 3. O exemplo com 3 é obtido considerando quatro pontos colineares e igualmente espaçados. Para mostrar que $|\mathcal{Q}| \leq 3$, assuma inicialmente que os pontos de M estão sobre uma mesma reta. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os pontos, assim ordenados. Então os possíveis quase centros de simetria são os pontos médios dos segmentos $P_1P_{n-1}, P_2P_n, P_1P_n$, de modo que $|\mathcal{Q}| \leq 3$.



Para o caso geral, note inicialmente que $\mathcal{Q}$ é finito, pois ele está contido no conjunto de pontos médios de segmentos de pontos de M (de fato, $|\mathcal{Q}| \leq n$, pois cada conjunto possui no máximo um centro de simetria). Seja ℓ uma reta que não é perpendicular a nenhum segmento definido por pontos de $M \cup \mathcal{Q}$, e sejam $\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{Q}}$ as projeções ortogonais de $M, \mathcal{Q}$ em ℓ. É fácil ver que $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é o conjunto de quase centros de simetria de $\widetilde{M}$. Como os pontos de $\widetilde{M}$ estão todos sobre ℓ, sabemos que $|\widetilde{\mathcal{Q}}| \leq 3$. Mas, pela escolha de ℓ, temos $|\mathcal{Q}| = |\widetilde{\mathcal{Q}}|$, de modo que $|\mathcal{Q}| \leq 3$.

Problema 10. (Cone Sul 1996) Ache todos os inteiros $n > 2$ para os quais existe um conjunto S_n de n pontos no plano satisfazendo as seguintes condições:

(i) três pontos quaisquer não são colineares;

(ii) nenhum ponto está no interior de um círculo que tenha por diâmetro dois pontos de S_n.

Solução.

Ideia: ângulos + fecho convexo

A condição (ii) diz que, quaisquer que sejam $A, B, C \in S_n$, temos $\angle ABC \leq 90°$. Considere o fecho convexo de S_n, digamos com $k \geq 3$ pontos, e seja Σ a soma de seus ângulos internos. Temos

$$180(k-2) = \Sigma \leq 90k \Rightarrow 2(k-2) \leq k \Rightarrow k \leq 4,$$

logo o fecho convexo de S_n é um triângulo ou um quadrilátero. Vamos analisar os casos:

- O fecho é um triângulo ABC: não pode existir nenhum ponto adicional no interior de ABC. Caso houvesse D, teríamos

  $$360° = \angle ADB + \angle BDC + \angle CDA \leq 270°,$$

  absurdo. Note que o triângulo equilátero satisfaz o problema.

- O fecho é um quadrilátero $ABCD$: necessariamente $ABCD$ é um retângulo, e de fato um quadrado (mostre isso). Os círculos com diâmetros sobre os lados do quadrado se intersectam em seu centro. Assim, $n = 4$ e $n = 5$ possuem exemplos.

Portanto, a solução é $n = 3, 4, 5$.

Problema 11. (Argentina 2000) Consideremos um polígono regular de n lados ($n > 2$). Em cada vértice se escreve um número inteiro entre 1 e n, inclusive, sem repetir os números. Diremos que uma distribuição dos números é *boa* se para cada três vértices A, B, C tais que $AB = AC$, se verifica que o número escrito em A é maior que cada um dos números escritos em B e C, ou o número escrito em A é menor que cada um dos números escritos em B e C. Determine todos os valores de n para os quais existe uma distribuição boa.

Solução.

Ideia: simetria

Se n é ímpar, é possvel fixar um vértice e olhar os demais em pares (simetricamente em relação ao diâmetro). Se o número associado ao vértice fixado é 2, chegamos a um absurdo. Assim, nenhum n ímpar possui distribuição boa. Melhor ainda: se n possui um divisor ímpar m, então a mesma argumentação se aplica, já que o n–ágono regular possui um m–ágono regular. Assim, os únicos n possíveis são as potências de dois. Os exemplos para $n = 2, 4$ são obtidos diretamente e, uma vez que o exemplo com $n = 2^k$ é feito, é possível construir o exemplo com $n = 2^{k+1}$ considerando dois 2^k–ágonos inscritos.

Problema 12. (Rússia 2017) Um polígono convexo P é dividido, utilizando algumas diagonais que não se intersectam, em triângulos isósceles. Prove que P possui dois lados de mesmo tamanho.

Solução.

Ideia: indução

Os casos em que P tem três e quatro lados são de fácil verificação. Antes de proceder por indução, observe que qualquer divisão de um polígono com n lados em triângulos tem exatamente $n-2$ triângulos. Em particular, há pelo menos dois triângulos com dois lados consecutivos de P. Assuma o resultado válido para polígonos convexos com n lados, e considere um polígono convexo P com $n+1$ lados dividido em triângulos isósceles. Há um triângulo ABC com A, B, C vértices consecutivos de P. Seja $\widetilde{P}$ o polígono convexo de n lados obtido retirando-se o triângulo ABC de P. Se dois lados de $\widetilde{P}$ distintos de AC são iguais, terminamos. Senão, AC e outro lado DE de $\widetilde{P}$ têm o mesmo tamanho. Como DE também é lado de P, concluímos a prova usando que ABC é isósceles:

- Se $AB = BC$, não há nada a fazer.
- Se $AC = AB$ então $AB = DE$ são lados de P. O mesmo vale se $AC = BC$.

Problema 13. (Rússia 2017) No plano, uma quantidade finita de retas em posição geral é desenhada. Essas retas dividem o plano em regiões. Mostre que é possível atribuir um número positivo a cada região de modo que, para cada reta desenhada, a soma dos números das regiões de um lado da reta e a soma dos números das regiões do outro lado da reta são iguais.

Solução.

Ideia: indução

Assuma que a soma de todos os números é $2S$. Os casos $n = 1, 2$ são diretos. Podemos assumir que a n–ésima reta adicionada intersecta $n + 1$ regiões ilimitadas (está mais por fora). Sejam $a_1, \ldots, a_{n+1}$ os números atribuídos a essas regiões. Então $a_1 + \cdots + a_n = S$, pois esses são os números associados às regiões à direita da reta mais "à direita" antes da adição da n–ésima reta. Logo $a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} > S$, de modo que podemos transpor um total de S para as novas $n + 1$ regiões. Ou seja, podemos escrever $a_i = b_i + c_i$, onde $b_i, c_i > 0$ e $c_1 + \cdots + c_{n+1} = S$. Associamos c_i à nova região criada e deixamos b_i na anterior.

Problema 14. (Romênia 2018) Seja n um inteiro positivo, e seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de perímetro igual a $6n$. São escolhidos $3n$ pontos em $\mathcal{C}$, que definem $3n$ arcos tais que exatamente n deles têm tamanho 1, n têm de tamanho 2 e n têm tamanho 3. Mostre que existem dois pontos escolhidos que são diametralmente opostos.

Solução.

Ideia: simetria + contagem

Tome $6n$ pontos $P_1, \ldots, P_{6n}$ de modo que cada arco P_iP_{i+1} tem tamanho 1, e assuma que os $3n$ pontos marcados estão entre os P_i's. Considere os $3n$ pares P_i, P_{i+3n} de pontos diametralmente opostos. Queremos mostrar que em algum desses pares os dois pontos foram marcados. Por contradição, assuma que isso não ocorre. Como existem $3n$ pares, em cada par escolhemos exatamente um dos pontos. Isso implica uma bijeção entre arcos de tamanho 1 e arcos de tamanho 3 da seguinte maneira:

- Se P_iP_{i+1} é um arco de tamanho 1 escolhido, então o arco $P_{i+3n-1}P_{i+3n+2}$ de tamanho 3 é escolhido.
- Reciprocamente, se $P_{i+3n-1}P_{i+3n+2}$ é um arco de tamanho 3 escolhido, então o arco P_iP_{i+1} de tamanho 1 é escolhido.

Vamos, a partir disso, obter uma contradição. Fixe um arco P_iP_{i+1} de tamanho 1, e considere o arco $P_{i+3n-1}P_{i+3n+2}$ de tamanho 3 diametralmente oposto. O complementar desses arcos é a união de dois arcos A, B, cada um deles de tamanho $3n-2$. Sejam x, y a quantidade de arcos de tamanhos $1, 2$ em A. Pela bijeção, existem x arcos de tamanho 3 em B, de modo que existem $n-1-x$ arcos de tamanho 3 em A. Assim, a quantidade de arcos de tamanhos $1, 2, 3$ em A é $x, y, n-1-x$ e em B é $n-1-x, n-y, x$, logo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3(n-1-x) = 3n-2 \\ (n-1-x) + 2(n-y) + 3x = 3n-2 \end{cases}$$

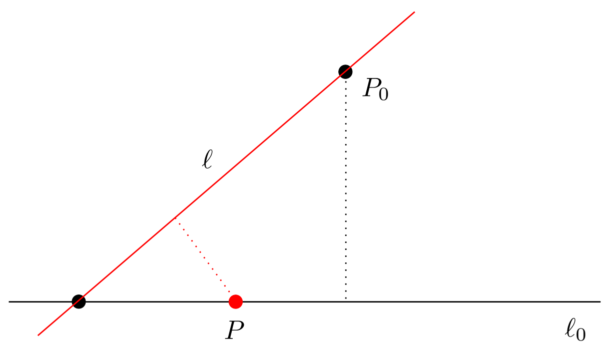
Qualquer das equações implica que $2(y-x) = 1$, um absurdo.

Problema 15. (Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.

Solução.

Ideia: princípio do extremo

A dificuldade é o contexto para o qual aplicar o princípio do extremo. Argumentamos por contradição, assumindo que nem todos os pontos de S estão em uma mesma reta. Considere o conjunto (não-vazio) de todos os pares (ℓ, P) onde ℓ é uma reta passando por dois pontos de S e P é um ponto de S não pertencente a ℓ. Para cada par (ℓ, P) como acima, seja $d = \mathrm{dist}(P, \ell)$ a distância de P a ℓ, e seja (ℓ_0, P_0) um par que minimiza d. A altura traçada de P_0 a ℓ_0 divide tal reta em duas partes. Como ℓ_0 contém dois pontos de S, na verdade ℓ_0 contém pelo menos três pontos de S, e portanto há dois desses pontos na mesma parte. O ponto mais afastado e P_0



definem uma reta ℓ que, juntamente com o ponto mais próximo P, definem um par (P, ℓ) para o qual $\mathrm{dist}(P, \ell) < \mathrm{dist}(P_0, \ell_0)$, uma contradição.