Yuri Lima yurilima@gmail.com

Combinatória geométrica

Problema 1. São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que:

(i) quaisquer duas retas são concorrentes;

(ii) por todo ponto de interseção entre duas retas passa pelo menos mais uma reta.

Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Problema 2. (Leningrado 1989) São desenhadas K retas em posição geral no plano (não existem três que se intersectam nem duas paralelas). Para quais valores de K é possível, independente da configuração das retas, atribuir a cada ponto de interseção um número do conjunto $\{1, 2, \ldots, K-1\}$ de modo que os $K-1$ números em cada reta são todos distintos?

Problema 3. (Moscou 1980) Sobre a esfera unitária, são marcados vários arcos de grande círculos. Sabe-se que a soma dos comprimentos dos arcos marcados é menor que π. Mostre que existe um plano passando pelo centro da esfera que não intersecta nenhum dos arcos marcados.

Problema 4. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Cada ponto de uma circunferência é colorido com uma dentre n cores. Prove que existe um trapézio inscrito na circunferência com todos os seus vértices pintados da mesma cor.

Problema 5. (Torneio das Cidades) Seja M um conjunto finito de pontos no plano. Um ponto P do plano é *quase centro de simetria* se existir $A \in M$ tal que P é centro de simetria de $M - \{A\}$. Determine o maior número possível de quase centros de simetria que M pode ter.

Problema 6. (IMO 1999) Determine todos os conjuntos finitos S de pontos do plano com pelo menos 3 pontos que satisfazem a seguinte condição: para quaisquer dois pontos A, B de S, a mediatriz de AB é um eixo de simetria de S.

Problema 7. (Ibero 2002) Dado qualquer conjunto de 9 pontos no plano sem três colineares, demonstre que para cada ponto P do conjunto o número de triângulos que têm como vértices três dos oito pontos restantes e P no seu interior é par.

Problema 8. (IMO 2002) Seja $n \geq 3$ inteiro. Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_n$ círculos de raio 1 no plano, com centros $O_1, O_2, \ldots, O_n$ respectivamente. Sabendo que nenhuma reta do plano intersecta mais de dois desses círculos, prove que:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Problema 9. (Coréia do Sul 2016) Dado $n \geq 2$, seja $S = \{(x, y) : x, y = 1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de pontos com coordenadas inteiras entre 1 e n. Escolha pelo menos $\frac{5}{2}n - 1$ pontos de S. Mostre que existe uma circunferência passando por pelo menos quatro desses pontos.

Problema 10. (Rússia 2017) No plano, uma quantidade finita de retas em posição geral é desenhada. Essas retas dividem o plano em regiões. Mostre que é possível atribuir um número positivo a cada região de modo que, para cada reta desenhada, a soma dos números das regiões de um lado da reta e a soma dos números das regiões do outro lado da reta são iguais.

Problema 11. (Romênia 2018) Seja n um inteiro positivo, e seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de perímetro igual a $6n$. São escolhidos $3n$ pontos em $\mathcal{C}$, que definem $3n$ arcos tais que exatamente n deles têm tamanho 1, n têm de tamanho 2 e n têm tamanho 3. Mostre que existem dois pontos escolhidos que são diametralmente opostos.

Problema 12. (OBM 2018) Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.

Problema 13. (Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S

passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.

Problema 14. (Teorema de Helly) Considere n figuras convexas no plano tais que a interseção de quaisquer três é não-vazia. Então a interseção das n figuras é não-vazia.

Problema 15. (Teorema de Boros-Füredi) Considere n pontos no plano. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que é coberto por pelo menos $(\frac{2}{9} - o(1))\binom{n}{3}$ desses triângulos.

Problema 1. São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que:

(i) quaisquer duas retas são concorrentes;

(ii) por todo ponto de interseção entre duas retas passa pelo menos mais uma reta.

Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Solução.

Ideia: dualidade + teorema de Sylvester

A cada reta ℓ associamos um ponto dual L de modo a preservar a propriedade de incidência:

$$P \in \ell \iff L \in p.$$

As condições do enunciado dizem que os $n \geq 3$ pontos duais satisfazem a hipótese do teorema de Sylvester, e portanto estão todos sobre uma mesma reta ℓ_0. Mas então todas as retas passam por um mesmo ponto (igual ao ponto dual L_0).

Problema 2. (Leningrado 1989) São desenhadas K retas em posição geral no plano (não existem três que se intersectam nem duas paralelas). Para quais valores de K é possível, independente da configuração das retas, atribuir a cada ponto de interseção um número do conjunto $\{1, 2, \ldots, K-1\}$ de modo que os $K-1$ números em cada reta são todos distintos?

Solução.

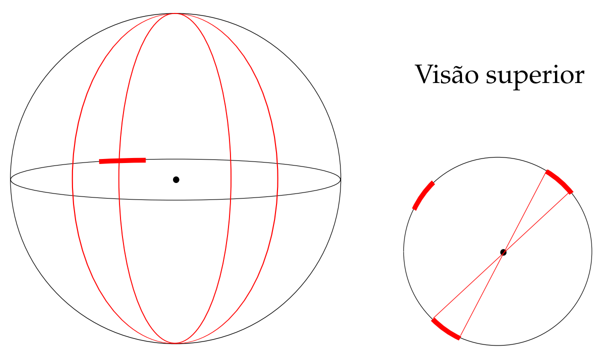
Ideia: paridade + teoria dos números

Olhe para o número 1. As retas podem ser pareadas de acordo com a presença de 1 na interseção, de modo que necessariamente K é par.
O difícil é construir o exemplo para cada K par. Chame as retas de $\ell_1, \ldots, \ell_K$. Começamos observando que podemos lidar com todas as interseções entre $\ell_1, \ldots, \ell_{K-1}$ da seguinte maneira: na interseção de ℓ_i, ℓ_j colocamos o número $i + j \pmod{K-1}$ (colocando $K-1$ se o resultado for 0). A única soma que não aparece é $2i \pmod{K-1}$. Basta associar esse número à interseção de ℓ_i, ℓ_K e notar que os números $2, 4, \ldots, 2(K-1)$ formam um sistema completo de resíduos módulo $K-1$ (pois K é par).

Problema 3. (Moscou 1980) Sobre a esfera unitária, são marcados vários arcos de grande círculos. Sabe-se que a soma dos comprimentos dos arcos marcados é menor que π. Mostre que existe um plano passando pelo centro da esfera que não intersecta nenhum dos arcos marcados.

Solução.

Ideia: dualidade + contagem



Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ os ângulos dos arcos. Seja O o centro da esfera. Para cada ponto P da esfera, considere o grande círculo C_P perpendicular a OP, que chamamos de **circunferência dual** de P. Similarmente, chame P de **ponto dual** de C_P. Sabemos por dualidade que $P \in C_Q \iff Q \in C_P$. Logo, se queremos uma circunferência $C = C_X$ que não intersecta nenhum dos arcos marcados, basta mostrarmos que existe X que não intersecta nenhuma das regiões duais $S_1, \ldots, S_n$ desses arcos. Note, pela figura, que a região dual S_i ao arco de ângulo α_i cobre uma fração da área da esfera igual a $\frac{\alpha_i}{\pi}$. Somando em i, segue que a união $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ não cobre toda a esfera, provando a existência de X.

Problema 4. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Cada ponto de uma circunferência é colorido com uma dentre n cores. Prove que existe um trapézio inscrito na circunferência com todos os seus vértices pintados da mesma cor.

Solução.

Ideia: identificação de mecanismo + PCP

Um quadrilátero inscrito em uma circunferência é um trapézio se e somente se dois arcos opostos definidos pelos vértices têm o mesmo comprimento. Vamos tomar um polígono regular inscrito na circunferência com uma quantidade k suficientemente grande de vértices de modo que existam dois pares de vértices que definem arcos de comprimentos iguais e pintados da mesma cor.

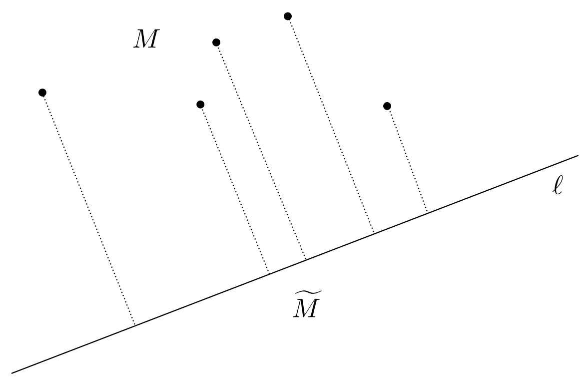
Tome $k = (n+1)(n^2+1)$ e divida o polígono em n^2+1 blocos de vértices consecutivos. Pelo PCP, cada bloco contém dois vértices pintados da mesma cor c. Se esses vértices definem um arco de tamanho l, associe o par (c, l) ao bloco. Cada coordenada desse par pode assumir n valores, visto que c representa uma cor e l representa uma distância entre dois vértices de um bloco. Assim, novamente pelo PCP, existem dois blocos associados ao mesmo par. Isso conclui a prova.

Problema 5. (Torneio das Cidades) Seja M um conjunto finito de pontos no plano. Um ponto P do plano é *quase centro de simetria* se existir $A \in M$ tal que P é centro de simetria de $M - \{A\}$. Determine o maior número possível de quase centros de simetria que M pode ter.

Solução.

Ideia: projeção

Seja $\mathcal{Q}$ o conjunto de quase centros de simetria de M. Afirmamos que o maior valor de $|\mathcal{Q}|$ é 3. O exemplo com 3 é obtido considerando quatro pontos colineares e igualmente espaçados. Para mostrar que $|\mathcal{Q}| \leq 3$, assuma inicialmente que os pontos de M estão sobre uma mesma reta. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os pontos, assim ordenados. Então os possíveis quase centros de simetria são os pontos médios dos segmentos $P_1P_{n-1}, P_2P_n, P_1P_n$, de modo que $|\mathcal{Q}| \leq 3$.



Para o caso geral, note inicialmente que $\mathcal{Q}$ é finito, pois ele está contido no conjunto de pontos médios de segmentos de pontos de M (de fato, $|\mathcal{Q}| \leq n$, pois cada conjunto possui no máximo um centro de simetria). Seja ℓ uma reta que não é perpendicular a nenhum segmento definido por pontos de $M \cup \mathcal{Q}$, e sejam $\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{Q}}$ as projeções ortogonais de $M, \mathcal{Q}$ em ℓ. É fácil ver que $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é o conjunto de quase centros de simetria de $\widetilde{M}$. Como os pontos de $\widetilde{M}$ estão todos sobre ℓ, sabemos que $|\widetilde{\mathcal{Q}}| \leq 3$. Mas, pela escolha de ℓ, temos $|\mathcal{Q}| = |\widetilde{\mathcal{Q}}|$, de modo que $|\mathcal{Q}| \leq 3$.

Problema 6. (IMO 1999) Determine todos os conjuntos finitos S de pontos do plano com pelo menos 3 pontos que satisfazem a seguinte condição: para quaisquer dois pontos A, B de S, a mediatriz de AB é um eixo de simetria de S.

Solução.

Ideia: simetria

Seja G o baricentro de S. Seja R_{AB} a reflexão com respeito à mediatriz de AB. Como $R_{AB}(S) = S$, então $R_{AB}(G) = G$. Como os pontos fixos de R_{AB} são a mediatriz de AB, segue que $GA = GB$. Isso mostra que todos os pontos estão sobre uma mesma circunferência e podem ser numerados de

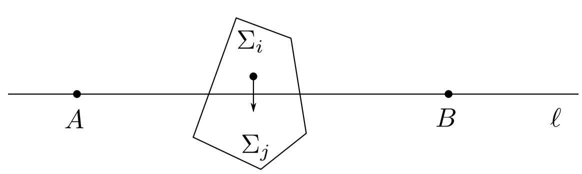
$A_1, A_2, \ldots, A_n$. Considerando $R_{A_iA_{i+2}}$, obtemos que $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}$. Isso prova que S é um polígono regular.

Problema 7. (Ibero 2002) Dado qualquer conjunto de 9 pontos no plano sem três colineares, demonstre que para cada ponto P do conjunto o número de triângulos que têm como vértices três dos oito pontos restantes e P no seu interior é par.

Solução.

Ideia: variação do ponto entre regiões

Uma reformulação do problema é a seguinte: dado um conjunto S de oito pontos do plano sem três colineares, então para qualquer ponto P em posição geral a quantidade de triângulos em S contendo P é par. Há um caso em que essa afirmação é trivial: se P não está no interior do fecho convexo de S, então existem 0 triângulos contendo P. Vamos mostrar que, ao variar P, a paridade da quantidade de triângulos não muda. Considere todas as retas definidas por pontos de S, e sejam $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ as regiões convexas formadas. A quantidade de triângulos contendo P só depende de qual região P está. Seja T_i a quantidade de triângulos contendo um ponto de Σ_i. Sejam Σ_i, Σ_j regiões vizinhas, adjacentes por uma reta ℓ definida por $A, B \in S$. Assuma que o semiplano contendo Σ_i possui x pontos de S, e o semiplano contendo Σ_j possui y pontos de S. Temos $x + y = 6$.



Fato: $T_j - T_i = y - x$.

É claro que o fato conclui o problema. Para mostrá-lo, basta notar que os únicos triângulos que deixam de conter P são formados por A, B e um dentre os x pontos do mesmo lado de Σ_i, e os únicos que passam a conter P são formados por A, B e um dentre os y pontos do mesmo lado de Σ_j.

Problema 8. (IMO 2002) Seja $n \geq 3$ inteiro. Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_n$ círculos de raio 1 no plano, com centros $O_1, O_2, \ldots, O_n$ respectivamente. Sabendo que nenhuma reta do plano intersecta mais de dois desses círculos, prove que:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Solução.

Ideia: projeção + contagem dupla

Primeiramente, devemos nos convencer de que esse é um problema de ângulos e não de distâncias. Dois círculos C_i, C_j determinam uma região em que nenhum outro C_k pode intersectar. Essa região é determinada pelas duas retas tangentes internas a C_i e C_j. Se tais retas intersectam-se em X, então achamos uma restrição sobre o ângulo que O_kX faz com O_iO_j, para $k \neq i, j$. Para melhor controlar tais ângulos, transferimos todos para uma mesma circunferência: considere uma circunferência ω de raio r suficientemente grande de modo a conter todos os círculos de raio 1. Cada par de círculos C_i, C_j define, a partir das retas tangentes internas, dois arcos PQ, RS de ω. Vamos somar todos esses comprimentos. Seja z_{ij} a soma dos dois arcos associados a C_i e C_j, $1 \leq i < j \leq n$. Seja $2\alpha_{ij}$ o ângulo entre as tangentes. Usando a fórmula básica do ângulo no interior de um círculo, temos que $z_{ij} = 4\alpha_{ij}r$. Como $\sin(\alpha_{ij}) = \frac{1}{\frac{O_iO_j}{2}}$, temos $\frac{1}{O_iO_j} = \frac{\sin(\alpha_{ij})}{2} < \frac{\alpha_{ij}}{2}$, logo

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} < \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\alpha_{ij}}{2} = \frac{1}{8r} \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_{ij},$$

portanto basta mostrar que $\sum z_{ij} \leq 2\pi r(n-1)$. Para isso, note que nenhum ponto de ω pertence a mais de $n-1$ arcos. Caso contrário, pelo PCP acharíamos índices i, j, k com $i < j$ e $i < k$ de modo que os arcos associados a C_i, C_j e associados a C_i, C_k se intersectam, o que contradiz a hipótese do problema.

Problema 9. (Coréia do Sul 2016) Dado $n \geq 2$, seja $S = \{(x, y) : x, y = 1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de pontos com coordenadas inteiras entre 1 e n. Escolha pelo menos $\frac{5}{2}n - 1$ pontos de S. Mostre que existe uma circunferência passando por pelo menos quatro desses pontos.

Solução.

Ideia: identificação de mecanismo + contagem

Seja T o conjunto de pontos escolhidos. Mostraremos que existe um trapézio isósceles com bases paralelas ao eixo x. Para isso, considere os conjuntos $B_i = \{(x, i) \in T\}$. Temos $|B_1| + \cdots + |B_n| \geq \frac{5}{2}n - 1$. Afirmamos que existem dois índices i, j e quatro pontos $(a, i), (b, i) \in B_i$ e $(c, j), (d, j) \in B_j$ tais que $a + b = c + d$ (essa última igualdade diz que o trapézio formado por esses pontos é isósceles). Para isso, considere $C_i = \{a + b : (a, i), (b, i) \in B_i\}$. Para estimar $|C_i|$, utilizamos o seguinte lema.

Lema. Dados k números distintos, seja A o conjunto de somas duas a duas. Então $|A| \geq 2k - 3$.

Prova. Se $x_1 < \ldots < x_k$, então $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \cdots < x_1 + x_n < x_2 + x_n < \cdots < x_{n-1} + x_n$ são $2k - 3$ somas distintas.

Pelo lema, $|C_i| \geq 2|B_i| - 3$, assim $\sum |C_i| \geq \sum |B_i| - 3n \geq 2n - 2$. Como $C_1 \cup \cdots \cup C_n \subset \{3, 4, \ldots, 2n - 1\}$, pelo PCP existem i, j tais que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$.

Problema 10. (Rússia 2017) No plano, uma quantidade finita de retas em posição geral é desenhada. Essas retas dividem o plano em regiões. Mostre que é possível atribuir um número positivo a cada região de modo que, para cada reta desenhada, a soma dos números das regiões de um lado da reta e a soma dos números das regiões do outro lado da reta são iguais.

Solução.

Ideia: indução

Assuma que a soma de todos os números é $2S$. Os casos $n = 1, 2$ são diretos. Podemos assumir que a n–ésima reta adicionada intersecta $n + 1$ regiões ilimitadas (está mais por fora). Sejam $a_1, \ldots, a_{n+1}$ os números atribuídos a essas regiões. Então $a_1 + \cdots + a_n = S$, pois esses são os números associados às regiões à direita da reta mais "à direita" antes da adição da n–ésima reta. Logo $a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} > S$, de modo que podemos transpor um total de S para as novas $n + 1$ regiões. Ou seja, podemos escrever $a_i = b_i + c_i$, onde $b_i, c_i > 0$ e $c_1 + \cdots + c_{n+1} = S$. Associamos c_i à nova região criada e deixamos b_i na anterior.

Problema 11. (Romênia 2018) Seja n um inteiro positivo, e seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de perímetro igual a $6n$. São escolhidos $3n$ pontos em $\mathcal{C}$, que definem $3n$ arcos tais que exatamente n deles têm tamanho 1, n têm de tamanho 2 e n têm tamanho 3. Mostre que existem dois pontos escolhidos que são diametralmente opostos.

Solução.

Ideia: simetria + contagem

Tome $6n$ pontos $P_1, \ldots, P_{6n}$ de modo que cada arco P_iP_{i+1} tem tamanho 1, e assuma que os $3n$ pontos marcados estão entre os P_i's. Considere os $3n$ pares P_i, P_{i+3n} de pontos diametralmente opostos. Queremos mostrar que em algum desses pares os dois pontos foram marcados. Por contradição, assuma que isso não ocorre. Como existem $3n$ pares, em cada par escolhemos exatamente um dos pontos. Isso implica uma bijeção entre arcos de tamanho 1 e arcos de tamanho 3 da seguinte maneira:

- Se P_iP_{i+1} é um arco de tamanho 1 escolhido, então o arco $P_{i+3n-1}P_{i+3n+2}$ de tamanho 3 é escolhido.
- Reciprocamente, se $P_{i+3n-1}P_{i+3n+2}$ é um arco de tamanho 3 escolhido, então o arco P_iP_{i+1} de tamanho 1 é escolhido.

Vamos, a partir disso, obter uma contradição. Fixe um arco P_iP_{i+1} de tamanho 1, e considere o arco $P_{i+3n-1}P_{i+3n+2}$ de tamanho 3 diametralmente oposto. O complementar desses arcos é a união de dois arcos A, B, cada um deles de tamanho $3n-2$. Sejam x, y a quantidade de arcos de tamanhos $1, 2$ em A. Pela bijeção, existem x arcos de tamanho 3 em B, de modo que existem $n-1-x$ arcos de tamanho 3 em A. Assim, a quantidade de arcos de tamanhos $1, 2, 3$ em A é $x, y, n-1-x$ e em B é $n-1-x, n-y, x$, logo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3(n-1-x) = 3n-2 \\ (n-1-x) + 2(n-y) + 3x = 3n-2 \end{cases}$$

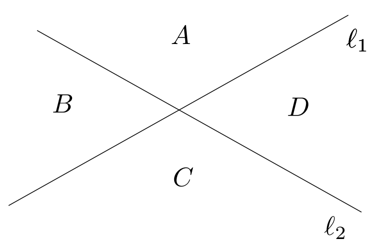
Qualquer das equações implica que $2(y-x) = 1$, um absurdo.

Problema 12. (OBM 2018) Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.

Solução.

Ideia: identificação de mecanismo + continuidade discreta

A identificação de mecanismo consiste em observar uma configuração que gera muitos triângulos. Nesse problema, a configuração consiste em duas retas ℓ_1, ℓ_2 que dividem o plano em quatro regiões, cada uma delas com n pontos. Uma vez provado



isso, podemos facilmente gerar $2n^3$ triângulos que contêm o ponto de interseção de ℓ_1 e ℓ_2: cada par de pontos escolhidos de regiões opostas pelo vértice (A e C; B e D) geram pelo menos n triângulos (olhe para o segmento gerado e tome o terceiro vértice na região que não intersecta o segmento).

Para construir ℓ_1, ℓ_2, utilizamos continuidade discreta. Fixe uma direção genérica e deslize uma reta do infinito, paralelamente a essa direção, até que ela divida o plano em duas regiões com $2n$ pontos cada. Isso funciona para quase toda direção, e define ℓ_1. Para definir ℓ_2, tome retas que também dividem o plano em duas regiões com $2n$ pontos cada, variando o ângulo que fazem com ℓ_1. Para cada escolha de segunda reta, as quatro regiões têm $x, 2n-x, x, 2n-x$ pontos, para algum x. Quando a segunda reta varia de ℓ_1 para $-\ell_1$ (a mesma reta, na orientação reversa), x varia de 0 a $2n$. Por continuidade discreta, existe uma angulação para a qual $x = n$.

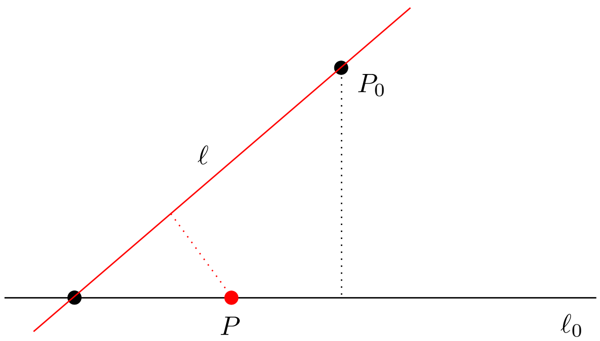
Observação: há um grau de liberdade na escolha de ℓ_1, que pode ser usada para escolher $\ell_1 \perp \ell_2$, ou para achar três retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 concorrentes que dividem o plano em seis regiões com a "mesma" quantidade de pontos, conforme faremos no problema 15.

Problema 13. (Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.

Solução.

Ideia: princípio do extremo

A dificuldade é o contexto para o qual aplicar o princípio do extremo. Argumentamos por contradição, assumindo que nem todos os pontos de S estão em uma mesma reta. Considere o conjunto (não-vazio) de todos os pares (ℓ, P) onde ℓ é uma reta passando por dois pontos de S e P é um ponto de S não pertencente a ℓ. Para cada par (ℓ, P) como acima, seja $d = \operatorname{dist}(P, \ell)$ a distância de P a ℓ, e seja (ℓ_0, P_0) um par que minimiza d. A altura traçada de P_0 a ℓ_0 divide tal reta em duas partes. Como ℓ_0 contém dois pontos de S, na verdade ℓ_0 contém pelo menos três pontos de S, e portanto há dois desses pontos na mesma parte. O ponto mais afastado e P_0 definem uma reta ℓ que, juntamente com o ponto mais próximo P, definem um par (P, ℓ) para o qual



$\mathrm{dist}(P, \ell) < \mathrm{dist}(P_0, \ell_0)$, uma contradição.

Problema 14. (Teorema de Helly) Considere n figuras convexas no plano tais que a interseção de quaisquer três é não-vazia. Então a interseção das n figuras é não-vazia.

Solução.

Ideia: interseção de figuras convexas é convexa + indução.

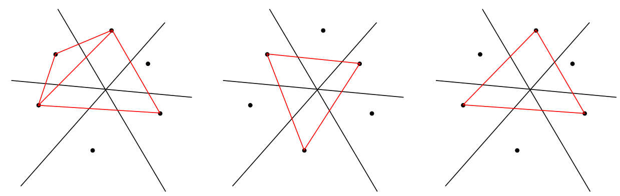
A maior dificuldade é o caso $n = 4$. Após entendê-lo, podemos facilmente provar o caso geral por indução. Sejam $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ as figuras. Por hipótese, existe $X_i \in \Sigma_{i+1} \cap \Sigma_{i+2} \cap \Sigma_{i+3}$ (considerando permutação cíclica dos índices). Logo, $X_1, X_2 \in \Sigma_3 \cap \Sigma_4$ e daí, por convexidade, todo o segmento $[X_1, X_2] \in \Sigma_3 \cap \Sigma_4$. Analogamente, $[X_3, X_4] \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Se esses dois segmentos se intersectam, então o ponto de interseção pertence a $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4$. Resta analisar quando eles não se intersectam, que é quando o fecho convexo de X_1, X_2, X_3, X_4 é um triângulo. Assuma que X_4 é o ponto interior. Como $X_1, X_2, X_3 \in \Sigma_4$, todo o triângulo $X_1X_2X_3$ está contido em Σ_4. Em particular $X_4 \in \Sigma_4$, e portanto $X_4 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4$.

Problema 15. (Teorema de Boros-Füredi) Considere n pontos no plano. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que é coberto por pelo menos $(\frac{2}{9} - o(1))\binom{n}{3}$ desses triângulos.

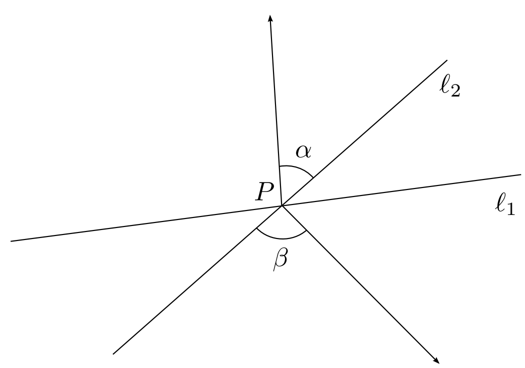
Solução.

Ideia: identificação de mecanismo + continuidade (discreta e usual)

A configuração que gera vários triângulos é uma divisão do plano por três retas concorrentes em seis regiões, cada uma delas contendo $\frac{n}{6} \pm 1$ pontos. Cada escolha de hexágono com um ponto em cada região gera pelo menos 8 triângulos: 6 gerados por quadriláteros com três vértices em três regiões consecutivas, 2 gerados por triângulos com vértices em regiões alternadas. Provado isso, o teorema segue.



A construção das três retas é um refinamento do argumento utilizado no problema 12, conforme descrevemos. Seja $\vec{v}$ uma direção diferente das $\binom{n}{2}$



direções definidas por pares de pontos. Existe $\ell_1 = \ell_1(\vec{v})$ que divide o plano em dois semiplanos A, B com $\frac{n}{2} \pm 1$ pontos cada. Para cada ponto $P \in \ell_1$, existe uma direção $\vec{w}_P$ tal que a reta passando por P com inclinação $\vec{w}_P$ divide o semiplano A em um setor com $\frac{n}{6} \pm 1$ pontos e outro com $\frac{n}{3} \pm 1$. Essa reta divide o semiplano B em dois setores com x, y pontos. Ao variar $P \in \ell_1$, o par (x, y) varia de $(0, \frac{n}{2} \pm 1)$ até $(\frac{n}{2} \pm 1, 0)$, logo por continuidade discreta existe

$P = P(\vec{v})$ tal que $(x, y) = (\frac{n}{6} \pm 1, \frac{n}{3} \pm 1)$. Seja $\ell_2 = \ell_2(\vec{v})$ a reta passando por P com inclinação $\vec{w}_P$. As retas ℓ_1, ℓ_2 dividem o plano em quatro regiões com $\frac{n}{6} \pm 1, \frac{n}{3} \pm 1, \frac{n}{6} \pm 1, \frac{n}{3} \pm 1$ pontos. Sejam agora $\alpha = \alpha(\vec{v}), \beta = \beta(\vec{v})$ direções tais que a semirreta partindo de P que faz um ângulo α com ℓ_2 divide a região com $\frac{n}{3} \pm 1$ pontos em duas regiões com $\frac{n}{6} \pm 1$ cada, e o mesmo para β. Isso define uma configuração por duas retas e duas semirretas que dividem o plano em seis regiões com $\frac{n}{6} \pm 1$ pontos cada, como na figura.

Resta mostrar que existe uma direção inicial $\vec{v}$ com $\alpha = \beta$. Para isso, basta notar que ao variar $\vec{v}$ continuamente até $\vec{v} + \pi$ (mesma reta ℓ_1, mas na direção oposta), (α, β) vira (β, α). Logo existe $\vec{v}$ com $\alpha = \beta$.