The 11th Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 1: Sexta-feira, 22 de fevereiro de 2019, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 1. Ana e Bob jogam um jogo. No começo, Ana escreve um inteiro positivo no quadro. Então, os jogadores jogam em turnos alternados. Bob começa. Em cada um de seus movimentos, Bob escolhe um inteiro positivo b e substitui o número n no quadro pelo número $n - b^2$. Já Ana, em cada um de seus movimentos, escolhe um inteiro positivo k e substitui o número n no quadro por n^k. Bob vence se o número no quadro se tornar zero. É possível para Ana impedir que Bob vença?

Problema 2. Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com AB paralelo a DC. Seja E o ponto médio de AC. Denote por Γ e Ω os circuncírculos dos triângulos ABE e CDE, respectivamente. A tangente a Γ por A e a tangente a Ω por D se intersectam em P. Prove que PE é tangente a Ω.

(O trapézio $ABCD$ com AB paralelo a DC é *isósceles* se $\angle BCD = \angle CDA$.)

Problema 3. Dado qualquer número real positivo ε, prove que, para todos exceto uma quantidade finita de inteiros positivos n, qualquer grafo simples com n vértices e pelo menos $(1+\varepsilon)n$ arestas tem dois ciclos simples distintos de tamanhos iguais.

(Um *grafo simples* é um conjunto V de vértices, junto a um conjunto A de arestas, onde cada aresta em A é um conjunto de dois vértices de V. Um *ciclo simples de tamanho k* é um conjunto C de $k \geq 3$ arestas distintas de A, tal que existe uma sequência de vértices distintos $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que para cada $1 \leq i < k$, $\{v_i, v_{i+1}\}$ está em C, e $\{v_k, v_1\}$ está em C.)

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.

The 11^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 2: Sábado, 23 de fevereiro de 2019, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 4. Prove que, para cada inteiro positivo n, existe um polígono (não necessariamente convexo) sem três vértices colineares, que admite exatamente n triangulações diferentes.

(Uma *triangulação* é uma dissecção do polígono em triângulos através de diagonais interiores que não têm pontos interiores em comum entre si nem com os lados do polígono.)

Problema 5. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2019y),$$

para todos os reais x e y.

Problema 6. Encontre todos os pares de inteiros (c, d), ambos maiores que 1, com a seguinte propriedade:

Para qualquer polinômio mônico Q de grau d com coeficientes inteiros e para qualquer primo $p > c(2c + 1)$, existe um conjunto S de no máximo $\left(\frac{2c-1}{2c+1}\right)p$ inteiros, de modo que

$$\bigcup_{s \in S} \{s,\ Q(s),\ Q(Q(s)),\ Q(Q(Q(s))),\ \ldots\}$$

contém um sistema completo de resíduos módulo p (isto é, tem interseção com cada classe de resíduos módulo p).

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.