30^{ma} Olimpíada Matemática de Países do Cone Sul
Dia 1

Sucre, 27 de Agosto de 2019

Problema 1: Martín tem duas caixas A e B. Na caixa A há 100 bolinhas vermelhas numeradas de 1 a 100, cada uma com um destes números. Na caixa B há 100 bolinhas azuis numeradas de 101 a 200, cada uma com um destes números. Martín escolhe dois números inteiros positivos a e b, ambos menores ou iguais a 100, e a seguir extrai ao acaso a bolinhas da caixa A e b bolinhas da caixa B, sem reposição. O objetivo de Martín é que dentre todas as bolinhas extraídas haja duas vermelhas e uma azul tal que a soma dos números das duas vermelhas seja igual ao número da azul.
Qual é o menor valor possível de $a + b$ para que Martín consiga com certeza seu objetivo? Para o mínimo valor achado de $a + b$ dar um exemplo de a e b que sempre cumpra o objetivo e justificar por que todo a e b com soma menor pode não cumprir o objetivo.

Problema 2: Dizemos que um inteiro positivo M de $2n$ dígitos é *hiperquadrado* se satisfaz as seguintes três condições:

- M é um quadrado perfeito.
- O número formado pelos primeiros n dígitos de M é um quadrado perfeito.
- O número formado pelos últimos n dígitos de M é um quadrado perfeito e tem exatamente n dígitos (não começa com zero).

Achar um número hiperquadrado de 2000 dígitos.

Problema 3: Seja $n \geq 3$ um inteiro. Determinar se existem permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dos números $(1, 2, \ldots, n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos números $(n+1, n+2, \ldots, 2n)$ tais que $(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$ seja uma progressão aritmética estritamente crescente.

Versão: Português

Duração: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos

30^{ma} Olimpíada Matemática de Países do Cone Sul
Dia 2

Sucre, 28 de Agosto de 2019

Problema 4: Achar todos os números primos positivos p, q, r, s tais que $p^2 + 2019 = 26(q^2 + r^2 + s^2)$.

Problema 5: Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Em cada casinha de um tabuleiro $n \times n$ se deve escrever 1 ou 2 de tal modo que a soma de todos os números escritos em cada subtabuleiro 2×3 e 3×2 seja par. De quantas maneiras distintas se pode preencher o tabuleiro?

Problema 6: Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$, e seja H seu ortocentro. A circunferência de diâmetro AH intersecta a circunferência circunscrita de ABC em $P \neq A$. A tangente à circunferência circunscrita de ABC por P intersecta a reta BC em Q. Demonstrar que $QP = QH$.

Versão: Português

Duração: 4 horas

Cada problema vale 10 pontos