# XXXIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

## Primeiro dia

15 de setembro de 2019

**Problema 1.** Para cada inteiro positivo $n$, seja $s(n)$ a soma dos quadrados dos dígitos de $n$. Por exemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determine todos os inteiros $n \geq 1$ tais que $s(n) = n$.

**Problema 2.** Determine todos os polinômios $P(x)$ de grau $n \geq 1$ com coeficientes inteiros tais que, para todo o número real $x$, se tem

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1)).$$

**Problema 3.** Seja $\Gamma$ o circuncírculo do triângulo $ABC$. A paralela a $AC$ que passa por $B$ interseta $\Gamma$ em $D$ ($D \neq B$) e a paralela a $AB$ que passa por $C$ interseta $\Gamma$ em $E$ ($E \neq C$). As retas $AB$ e $CD$ intersetam-se em $P$ e as retas $AC$ e $BE$ intersetam-se em $Q$. Seja $M$ o ponto médio de $DE$. A reta $AM$ interseta $\Gamma$ em $Y$ ($Y \neq A$) e a reta $PQ$ em $J$. A reta $PQ$ interseta o circuncírculo do triângulo $BCJ$ em $Z$ ($Z \neq J$). Se as retas $BQ$ e $CP$ se intersetam em $X$, demonstre que $X$ pertence à reta $YZ$.

*Nota.* O circuncírculo de um triângulo é a circunferência que passa pelos vértices do triângulo.

*Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.*
*Cada problema vale 7 pontos.*

# XXXIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

## Segundo dia

16 de setembro de 2019

**Problema 4.** Seja $ABCD$ um trapézio com $AB \parallel CD$ e inscrito na circunferência $\Gamma$. Sejam $P$ e $Q$ dois pontos no segmento $AB$ ($A, P, Q, B$ estão nessa ordem e são distintos) tais que $AP = QB$. Sejam $E$ e $F$ os segundos pontos de interseção das retas $CP$ e $CQ$ com $\Gamma$, respetivamente. As retas $AB$ e $EF$ intersetam-se em $G$. Demonstre que a reta $DG$ é tangente a $\Gamma$.

**Problema 5.** Don Miguel coloca uma ficha em algum dos $(n+1)^2$ vértices determinados por um tabuleiro $n \times n$. Uma *jogada* consiste em mover a ficha do vértice em que se encontra para um vértice adjacente em alguma das oito direções possíveis: $\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$, sem sair do tabuleiro. Um *percurso* é uma sucessão de jogadas tal que a ficha esteve em cada um dos $(n+1)^2$ vértices exatamente uma vez. Qual é a maior quantidade de jogadas diagonais ($\nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$) que um percurso pode ter no total?

**Problema 6.** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ inteiros positivos e $P$ um polinómio com coeficientes inteiros tal que, para todos os inteiros positivos $n$,

$$P(n) \text{ divide } a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n.$$

Demonstre que $P$ é um polinómio constante.

*Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.*
*Cada problema vale 7 pontos.*