OBMU 2019 - Primeira Fase

Sexta-feira 13 de setembro de 2019

1. Sobre a equação $\frac{x^2}{n} = \cos x$, onde n é um natural fixado, é correto afirmar que:
   (a) ela tem um número infinito de soluções no intervalo $[0, +\infty)$.
   (b) ela tem um número finito e ímpar de soluções em $\mathbb{R}$.
   (c) ela tem exatamente uma solução no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
   (d) Se a_n é uma solução pertencente ao intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ não existe.

2. Qual é o menor número de regiões em que 2019 planos distintos podem dividir $\mathbb{R}^3$?
   (a) 2020 (b) 2018 (c) $2^{2019} - 1$ (d) 2^{2019}

3. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o anel das matrizes 2×2 com entradas reais e sejam $I \in M_2(\mathbb{R})$ e $0 \in M_2(\mathbb{R})$ as matrizes identidade e nula respectivamente. Quantas matrizes $X \in M_2(\mathbb{R})$ satisfazem a equação $X^2 + I = 0$?
   (a) infinitas (b) 0 (c) 2 (d) 8

4. Sabendo que $1,09 < \ln 3 < 1,1$, determine o número de zeros de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3^x - 1 - 2x^2$.
   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

5. Calcule o resultado da seguinte soma: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$
   (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{\pi^2}{6}$ (d) $+\infty$

6. Seja z um número complexo com $|z - 4| = 1$. Determine o valor máximo de $|z + 3i|$.
   (a) 6 (b) 7 (c) 4 (d) 5

7. 20 sapatos, provenientes de 10 pares de sapatos, são enfileirados aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que na fila haja um conjunto de 10 sapatos consecutivos com 5 sapatos esquerdos e 5 sapatos direitos?
   (a) 1 (b) 1/2 (c) 1/20 (d) $\frac{1}{\binom{20}{10}}$

8. Qual é o ínfimo sobre todos os quadriláteros convexos com perímetro 8 da soma dos comprimentos de suas duas diagonais?
   (a) 4 (b) 0 (c) $4\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{10}$

9. Para quantos valores de n inteiros positivos o determinante da matriz:

$$\begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 3^n & -2^n \end{pmatrix}$$

é divisível por 7?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 15

10. Seja R_2 o $\mathbb{R}$-espaço vetorial formado pelos polinômios com coeficientes reais e de grau no máximo 2. Então, sobre a identidade

$$\int_0^6 p(x)\,dx = \alpha \cdot p(0) + \beta \cdot p(1) + \gamma \cdot p(2)$$

podemos afirmar:

(a) ela é satisfeita para todo $p(x) \in R_2$, se e só se, $\alpha = 15$, $\beta = -36$, $\gamma = 27$

(b) não existem α, β, γ reais que tornam a identidade verdadeira para todo $p(x) \in R_2$

(c) há infinitos valores de α, β, γ reais que tornam a identidade verdadeira para todo $p(x) \in R_2$

(d) ela é satisfeita para todo $p(x) \in R_2$, se e só se, $\alpha = 10$, $\beta = -16$, $\gamma = 12$

11. Seja C o disco de raio 1 centrado na origem de $\mathbb{R}^2$ e considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \Big(\frac{5x+3y}{4}, \frac{3x+5y}{4}\Big). \end{aligned}$$

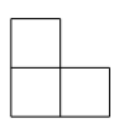
Qual o menor n natural para o qual $T^n(C)$ contém pelo menos 2019 pontos (a, b) com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}^2$?

(a) 10 (b) 8 (c) 9 (d) 11

12. Seja n um inteiro ímpar e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Qual é a menor dimensão possível do espaço gerado pelos vetores $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$?

(a) n (b) 1 (c) 2 (d) $n - 1$

13. Um L-triminó a peça formada a partir de um tabuleiro 2×2 com uma casa do canto removida. Seja p_k a probabilidade de que um tabuleiro $2 \times (3k + 2)$, com um quadradinho aleatório removido, possa ser coberto por L-triminós em qualquer orientação. Determine o valor de $\lim\limits_{k\to\infty} p_k$.



(a) 2/3 (b) 1/2 (c) 3/4 (d) 1/6

14. Seja $M_{3\times 3}$ o espaço de todas as matrizes 3×3 de coeficientes reais. Se S é o subespaço de $M_{3\times 3}$ gerado pelas matrizes da forma $AB - BA$, com A e B em $M_{3\times 3}$, encontre a sua dimensão.

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8

15. Seja A uma matriz real 3×3 tal que $Posto(A) = 1$ e $tr(A) = 3$. Determine o valor de $det(A + I)$.

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8

16. Seja G um grupo com elemento neutro e. Sejam $a, b \in G$ dois elementos tais que $b^4 = e$ e $bab^{-1} = a^3$. Então podemos afirmar que, necessariamente,

(a) $a^{80} = e$ (b) $a = e$ (c) $a^{41} = e$ (d) $a^{13} = e$

17. A parte inteira de um número real x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, é o maior inteiro que ne maior que x. A parte fracionária de x, denotada por $\{x\}$, é dada pelo valor de $x - \lfloor x \rfloor$. Por exemplo, se $x = 1,71$, então $\lfloor x \rfloor = 1$ e $\{x\} = 0,71$. Determine

$$\lim_{n\to\infty} \{(2 + \sqrt{3})^n\}.$$

(a) $\sqrt{3}/2$ (b) 1 (c) $\sqrt{2}/2$ (d) 0

18. Calcule

$$\int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x(x+e^x)} dx.$$

(a) 1 (b) $\ln 2$ (c) $\ln\left(\frac{2+e^2}{2+2e}\right)$ (d) $\ln\left(\frac{e^2}{1+e}\right)$

19. Seja $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, um grupo multiplicativo de quatérnios. O número de homomorfismo de grupos $f : S_3 \to Q_8$ é igual a:

Notas: Em Q_8, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k, jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$.

S_3 é o grupo das permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8

20. Seja $\mathbb{F}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ o corpo dos inteiros módulo p (com p primo). Seja V um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial de dimensão 3. Quantos subespaços de dimensão 2 há em V?

(a) $p^2 + p + 1$ (b) p (c) $p^2 - 1$ (d) $p + 1$

21. Determine o valor de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{1 + \cos(2x)^2} dx.$$

(a) $\pi/2$ (b) $\pi^2/4$ (c) $\pi/8$ (d) $\pi^2/16$

22. Se $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$ são as raízes de $P(x) = x^{2019} + 2019x - 1$, determine o valor de

$$\sum_{i=1}^{2019} \frac{x_i}{x_i - 1}.$$

(a) 1 (b) 2017 (c) 2019 (d) 2020

23. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2(\frac{\pi k}{2n+1})}{n^2}.$$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{\pi^2}{6}$

24. Determine quantos são os possíveis ângulos α tais que:

i) A medida de α, em graus, é racional.

ii) α é ângulo interno de algum triângulo com lados inteiros.

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

25. Considere a sequência definida por $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e, para $n \geq 3$,

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Determine o resto na divisão de a_{2019} por 2019.

(a) 1 (b) 2 (c) 2017 (d) 2018