Vingança Olímpica 2018

1. Seja F_n o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Determine todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que $\forall\ k = 0, 1, 2, \ldots, F_n$, temos que

$$\binom{F_n}{k} \equiv (-1)^k\ (mod\ F_n + 1).$$

2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo escaleno de incentro I e circuncírculo Γ, de centro O. O incírculo de $\triangle ABC$ tangencia BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. A reta AI intersecta EF em N e Γ em $M \neq A$. MD intersecta Γ em $L \neq M$. A reta IL intersecta EF em K. A circunferência de diâmetro MN intersecta Γ em $P \neq M$. Prove que AK, PN e OI concorrem.

3. Em um desafio matemático, são dadas para Matheus Secco duas sequências de reais positivos $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_{n+1}$ e um real não negativo c. Uma operação consiste em subtrair 1 de um termo b_j, somar c em b_{n+1} e substituir $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ por $(b_1 + a_{\sigma(1)}, \ldots, b_{j-1} + a_{\sigma(j-1)})$, onde σ é permutação de $\{1, \ldots, j-1\}$. O objetivo de Secco é deixar todos os termos da sequência (b_k) negativos após um número finito de operações. Determine os valores de c em função de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ para os quais Secco pode atingir o seu objetivo.

4. Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo de incentro I e incírculo ω. Seja T_A, T_B, T_C os pontos de tangência de ω com BC, CA, AB, respectivamente. Seja l_A como a reta por A paralela a BC e defina l_B e l_C analogamente. Seja L_A a segunda interseção de AI com o circuncírculo de ABC e defina L_B e L_C analogamente. Sendo $P_A = T_B T_C \cap l_A$, definimos os pontos P_B e P_C de maneira análoga. Sabendo que $S_A = P_B T_B \cap P_C T_C$ e definindo S_B e S_C analogamente, prove que $S_A L_A, S_B L_B, S_C L_C$ são concorrentes.

5. Seja p um primo e $\mathbb{F}_p$ o conjunto de inteiros módulo p. Dado um elemento x de $\mathbb{F}_p$, defina $|x|$ como a *distância cíclica* de x para 0, isto é, se representarmos x como um inteiro entre 0 e $p-1$, $|x| = x$ se $x < \frac{p}{2}$, e $|x| = p - x$ caso contrário. Agora seja $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ tal que para todos $x, y \in \mathbb{F}_p$, temos:

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| < 100.$$

Prove que existe $m \in \mathbb{F}_p$ tal que para todos $x \in \mathbb{F}_p$, temos:

$$|f(x) - mx| < 1000.$$