Combinatória Inicial

Carlos Alex

27 de janeiro de 2020

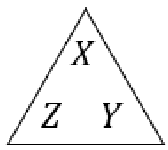
Nessa aula iremos trabalhar os tópicos trabalhados no assunto de análise combinatória. Iremos iniciar com contagem simples e colocaremos outros tópicos como permutações e combinação. Iremos iniciar o nosso estudo com alguns problemas resolvidos.

Problema Resolvido 1. (OBM 2016) Jaci entrega jornais numa rua na qual os números das casas têm exatamente dois algarismos e ambos são ímpares, como por exemplo, 37. No domingo passado ela entregou jornais em 18 casas. No máximo, quantas casas não receberam o jornal?

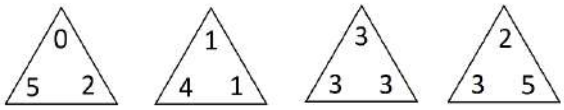
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

Solução: (D)
Existem 5 algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9. Logo, existem 5.5=25 números de exatamente dois dígitos e sendo ambos ímpares. Portanto, no máximo 25 – 18 = 7 casas não receberam jornal.

Problema Resolvido 2. (OBM 2014 -NÍVEL 2) O jogo de *triminó simplificado* é composto por peças na forma de triângulo em que cada um dos vértices possui um número de 0 a 5. Sabe-se que para qualquer peça do triminó simplificado quando se coloca o menor dos números no vértice superior os números estão em ordem crescente no sentido horário, ou seja, a peça faz parte do triminó simplificado quando $X \leq Y \leq Z$.



Por exemplo, das quatro peças a seguir, três primeiras peças fazem parte do jogo, mas a quarta não.



Existem quantas peças em um jogo de triminó simplificado?

A) 216 **B)** 125 **C)** 120 **D)** 56 **E)** 30

Solução (D)
Dada uma escolha qualquer de três números no conjunto $\{0,1,2,3,4,5\}$, o triminó simplificado formado por eles é único. Existem $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$ escolhas de três números distintos em tal conjunto. Para contarmos quantas escolha possuem exatamente dois números repetidos, basta escolhermos dois números e, em seguida, escolhermos um deles para repetirmos. Podemos fazer isso de $2\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=30$ formas. Claramente existem exatamente 6 triminós com os três números iguais. Portanto, o número procurado é: $20+30+6=56$

Problema Resolvido 3 (OBM 2011 2ª FASE NÍVEL 1) Quantos números de três algarismos diferentes de zero têm pelo menos dois algarismos iguais?

Solução:
Há $9\times 9\times 9=729$ números de três algarismos não nulos. Destes, $9\times 8\times 7=504$ tem os três algarismos distintos. Portanto, há $729-504=225$ números com pelo menos dois algarismos iguais.

Problema Resolvido 4 (OBM 2014 2ª FASE NÍVEL 2) No super bola, o mais novo jogo de futebol, o jogador joga em temporadas. Cada temporada possui sete partidas e em cada partida o jogador pode obter 3 pontos se vencer, 1 ponto se empatar e 0 pontos se perder. De quantos modos diferentes um jogador pode obter exatamente 15 pontos em uma temporada?

Solução:
Problema de Combinação $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Um jogador deve obter pelo menos 4 vitórias pois caso contrário sua pontuação será no máximo:
3.3 + 4.1 = 13
Com 4 vitórias, o jogador deve obter exatamente 3 empates. Em tal circunstância existem $\binom{7}{3} = 35$ maneiras de arranjar esses resultados dentre os sete jogos pois basta escolher as partidas que serão empates. Com 5 vitórias, ele deve perder os outros dois jogos. Em tal circunstância existem $\binom{7}{2} = 21$ maneiras de arranjar esses resultados dentre os sete jogos pois basta escolher quais partidas serão derrotas. Logo, o total é 35 + 21 = 56

PROBLEMAS INICIAIS PARA PRATICAR!

Problema 1. Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Problema 2. Qual o número de anagramas das palavras abaixo:

a) ALEX

b) SEMANA

c) MATEMÁTICA, sendo que “TI” tem que ficar juntos e nessa ordem.

d) MEDALHA, sendo que “MED” tem que ficar juntos.

Problema 3. Cinco alunos na semana olímpica devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que dois deles se recusam a ficar lado a lado. Qual o número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas?

Problema 4. (OBM 2006) As permutações da palavra BRASIL foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de seis letras em um dicionário. A 361ª palavra nessa lista é?

Problema 5. O Coordenador encarregado de levar os alunos para assistirem as aulas na semana olímpica deve escalar uma comitiva para um passeio composta por um medalhista de ouro, dois de prata e duas de bronze. Estão aptos para serem escalados três de ouro, cinco de prata e sete de bronze. O número de comitivas distintas que se pode obter com esses militares é igual a

PROBLEMAS OLÍMPICOS!

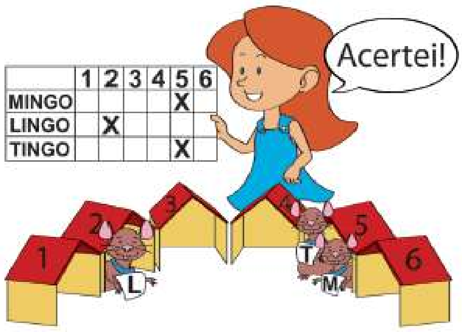
Problema 6. (OBMEP 2015) Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.

a) Quantas são as senhas que começam com 20152015?

b) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?

c) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?

Problema 7. (OBMEP 2011) Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.



a) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?

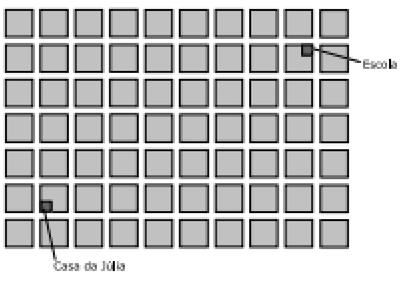
b) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?

c) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

Problema 8. (OBM 2014) O número 2014 tem quatro algarismos distintos cuja soma é 7. Quantos números inteiros positivos têm essas duas propriedades?

Problema 9. (OBM 2010) Dizemos que um número inteiro positivo n é abestado se ao lermos da direita para esquerda obtivermos um inteiro maior que n. Por exemplo, 2009 é abestado porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é abestado pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é abestado pois quando lido da direita para esquerda é exatamente igual ao original. Quantos inteiros positivos de quatro algarismos são abestados?

Problema 10. (BANCO DE QUESTÕES OBMEP 2010) ***Outros caminhos*** **–** Partindo de sua casa para chegar na escola, Júlia deve caminhar oito quarteirões para a direita e cinco quarteirões para cima, conforme indicado na figura dada.



Ela sabe que existem muitas maneiras diferentes de fazer o percurso casa-escola, sempre seguindo o caminho mais curto. Como ela é uma menina muito curiosa, ela gostaria de sempre fazer caminhos diferentes. Quantos desses caminhos existem da casa de Júlia até a escola?

Problema 11. (OBM 2013) Ela sabe que existem muitas maneiras diferentes de fazer o percurso casa-escola, sempre seguindo o caminho mais curto. Como ela é uma menina muito curiosa, ela gostaria de sempre fazer caminhos diferentes. Quantos desses caminhos existem da casa de Júlia até a escola?

Dizemos que um número inteiro positivo é *enrolado* se satisfaz as duas condições a seguir:

- Tem três ou mais algarismos.
- Um de seus algarismos é igual à soma de todos os demais.

Por exemplo:

2013 é enrolado, pois 3 = 2 + 0 + 1;

220 é enrolado, pois 2 = 0 + 2;

789 não é enrolado, pois nenhum de seus algarismos é a soma dos demais;

22 não é enrolado, pois é um número de dois algarismos (observe que 022 é igual a 22, ou seja, não é enrolado).

a) Qual é o maior número enrolado formado por algarismos diferentes de zero?

b) Quantos números enrolados de três algarismos existem?

Problema 12. (OBM 2005) Quantos números entre 10 e 13000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por dígitos consecutivos e em ordem crescente? Exemplificando, 456 é um desses números, mas 7890 não é.

Problema 13. (OBM 2003) Num tabuleiro 2 × 2, como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: A > B, C > D, A > C e B > D.

A	***B***
C	***D***

a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que B = C?

b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

Problema 14. (OBM 2009) De quantas maneiras dois casais podem sentar-se em quatro cadeiras em fila se marido e mulher devem sentar-se em cadeiras vizinhas?

Problema 15. (OBM 2008 NÍVEL 3) Quantas permutações de 1, 2, 3, ..., 9 há com a propriedade de que, para todo $1 \leq i < 9$, os números que aparecem entre i e i + 1 (onde i pode aparecer tanto antes como depois de i + 1) são todos menores do que i? Por exemplo, 976412358 é uma permutação com esta propriedade.